Lyhyt MATIKKA 3

Matemaattisia malleja I

Arno Aalto
Jukka Kangasaho
Outi Kylliäinen
Arja Metiäinen
Jukka Mäkinen
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti:
asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen
rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-1498-3 Lyhyt Matikka 3

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1889-9
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1890-5

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Timo Mäkelä ja
Marja Venäläinen
Kuvatoimitus: Anita Kokkila

© Arno Aalto, Jukka Kangasaho,
Outi Kylliäinen, Arja Metiäinen,
Jukka Mäkinen, Jorma Tahvanainen
ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Käyttäjälle

Lyhyt matikka

Matematiikkaa käytetään hyväksi lähes kaikilla tiedon aloilla, luonnontieteiden ja tekniikan lisäksi myös yhteiskunnallisilla ja humanistisilla aloilla. Yhä useammin uuden tiedon omaksuminen opinnoissa ja työelämässä edellyttää matematiikan tietoja.

Lyhyt matikka -sarjan tavoitteena on, että jokainen oppilas oppii tarpeellisia matematiikan tietoja ja taitoja, omaksuu myönteisen asenteen matematiikkaan ja tottuu luottamaan kykyynsä oppia matematiikkaa.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai johdantoesimerkki. Seuraavat esimerkit opastavat löydetyn tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Tuntityöskentelyssä voidaan jo aikaisessa vaiheessa siirtyä harjoitteluun, jolloin oppilaat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena vaativuudeltaan samantasoisena sarjana. Sarjaa I voidaan käyttää harjoitteluun oppitunnilla ja sarjasta II voidaan valikoida kotitehtävät.

Symbolinen laskin

Oppikirja tukee symbolisen laskimen hyödyntämistä opiskelussa. Oleelliset kohdat, joissa neuvotaan laskimen käyttöä, on merkitty marginaalissa olevalla laskinsymbolilla.

Kertaaminen

Koko kurssi voidaan kerrata kertausluvun avulla. Kertauslukua seuraavat samojen otsikoiden mukaan järjestetyt kertaustehtävät, ja kertausosuuden päättää kolme tehtäväsarjaa.

Matemaattisia malleja I

Kurssilla tutkitaan sellaisia suureiden välisiä riippuvuuksia, joita voidaan kuvata suoran tai potenssin avulla. Opitaan muun muassa muodostamaan ja käyttämään suorien yhtälöitä. Potenssin käsitettä yleistetään niin, että eksponenttina voi olla mikä tahansa luku. Näin päädytään eksponenttifunktioon, jonka tutkiminen johtaa edelleen uuteen käsitteeseen, logaritmiin.

Toivotamme innostavia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 3.6.2013

Tekijät

Sisällys

Lineaarinen muutos ja kulmakerroin 4
Kulmakertoimen laskeminen 15
Suoran yhtälö 21
Suoran yhtälön muodostaminen 30
Suorien leikkauspiste 39
Kahden pisteen määräämä suora 45
Muutosprosentti ja muuttuneen arvon laskeminen 50
Prosenttilausekkeita 56
Potenssi 62
Eksponentiaalinen kasvaminen ja väheneminen 73
Negatiivinen eksponentti 81
Eksponenttifunktio 90
Logaritmi 96
Logaritmin sovelluksia 103
Korkeammat juuret ja potenssiyhtälö 111
Eksponentiaalisen mallin sovelluksia 117

Kertaus 122
Kertaustehtäviä 133
Tehtäväsarjoja 138
Vastaukset 140
Hakemisto 164

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 16 75 minuutin pituista oppituntia.

Luku	**Tunteja**
Lineaarinen muutos ja kulmakerroin	1
Kulmakertoimen laskeminen	1
Suoran yhtälö	1
Suoran yhtälön muodostaminen	1
Suorien leikkauspiste	1
Kahden pisteen määräämä suora	1
Muutosprosentti ja muuttuneen arvon laskeminen	1
Prosenttilausekkeita	1
Potenssi	1
Eksponentiaalinen kasvaminen ja väheneminen	1
Negatiivinen eksponentti	1
Eksponenttifunktio	1
Logaritmi	1
Logaritmin sovelluksia	1
Korkeammat juuret ja potenssiyhtälö	1
Eksponentiaalisen mallin sovelluksia	1

1 Lineaarinen muutos ja kulmakerroin

ONGELMA

Suvikummun lukiossa sijaitseva eduskuntavaalien äänestyspaikka avattiin sunnuntaiaamuna kello 8. Kello 15 vaalilautakunnan puheenjohtaja kertoi paikallisradiossa, että seitsemän tunnin aikana äänestäjiä oli ollut 350, ja ennusti, kuinka paljon ääniä kertyy sulkemisaikaan kello 20 mennessä. Mikä ennuste oli, jos se perustui oletukseen, että

a) joka tunti kertyy yhtä monta ääntä

b) äänten kertymää kuvaa suora?

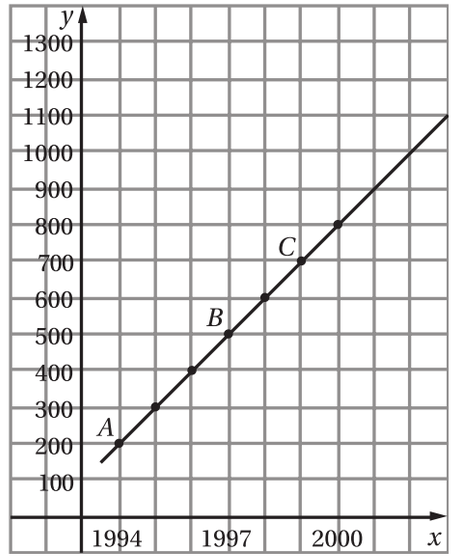
Lineaarinen riippuvuus

Suureen y riippuvuus suureesta x on *lineaarinen* eli *suoraviivainen*, jos riippuvuutta kuvaa suora.

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

a) Tutki kuvion suoralla, kuinka paljon pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä yksiköllä lähdettäessä pisteestä A, B tai C.

b) Laske suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$, kun siirrytään pisteestä A pisteeseen B ja kun siirrytään pisteestä B pisteeseen C.



RATKAISU

a) Kun suoralla olevan pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä, niin y-koordinaatti kasvaa aina 100:lla.

b) Kun suoralla siirrytään pisteestä A pisteeseen B, niin suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ on $\dfrac{300}{3} = 100$.

Kun siirrytään pisteestä B pisteeseen C, suhde on $\dfrac{200}{2} = 100$.

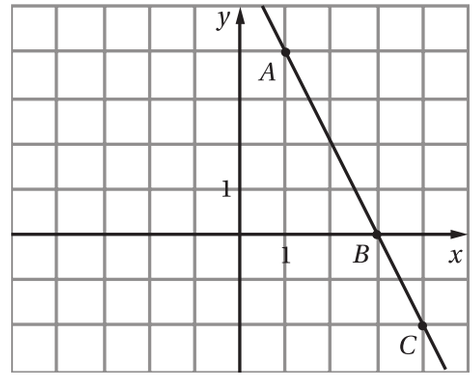
VASTAUS

a) Kasvaa aina 100:lla.

b) Kumpikin suhde on 100.

JOHDANTO-ESIMERKKI 2

Koordinaatistoon on piirretty suora, joka kulkee pisteiden $A = (1, 4)$, $B = (3, 0)$ ja $C = (4, -2)$ kautta.



a) Tutki suhdetta

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}},$$

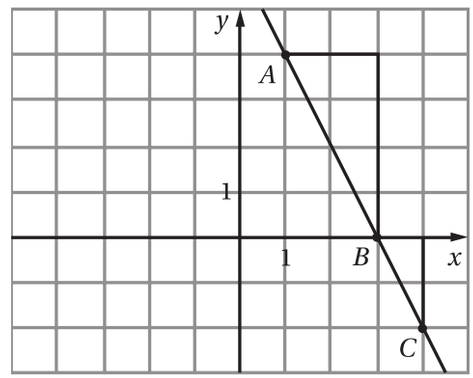
kun siirrytään pisteestä A pisteeseen B ja edelleen pisteestä B pisteeseen C.

b) Kuinka suoralla olevan pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä?

RATKAISU

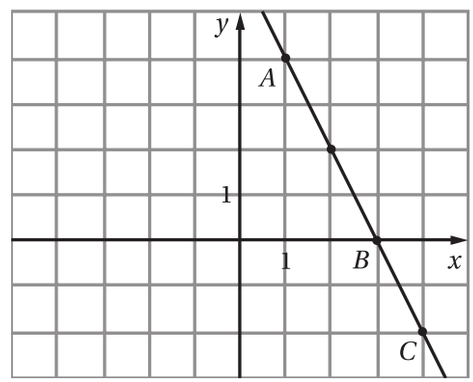
a) Kun siirrytään pisteestä $A = (1, 4)$ pisteeseen $B = (3, 0)$, x-koordinaatti suurenee arvosta 1 arvoon 3, joten x-koordinaatin muutos on 2. y-koordinaatti pienenee arvosta 4 arvoon 0, joten y-koordinaatin muutos on -4. Suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ on $\dfrac{-4}{2} = -2$.

Kuvioon piirretyn suorakulmaisen apukolmion kateettien pituudet ovat muutosten itseisarvot.



Kun siirrytään pisteestä $B = (3, 0)$ pisteeseen $C = (4, -2)$, x-koordinaatin muutos on 1 ja y-koordinaatin muutos -2.

Suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ on $\dfrac{-2}{1} = -2$.



Suhteet ovat yhtä suuret.

b) Kun suoralla olevan pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä, niin y-koordinaatti pienenee aina kahdella. y-koordinaatin muutos on -2.

VASTAUS

a) Kumpikin suhde on -2.

b) y-koordinaatti pienenee aina kahdella, eli y-koordinaatin muutos on -2.

Suoran kulmakerroin

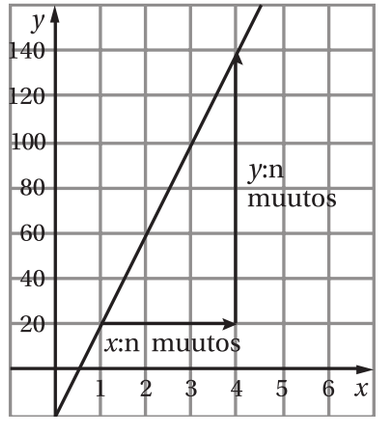
Kun siirrytään suoran pisteestä toiseen pisteeseen, niin suhde

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$$

on aina sama. Suhdetta sanotaan suoran *kulmakertoimeksi*.

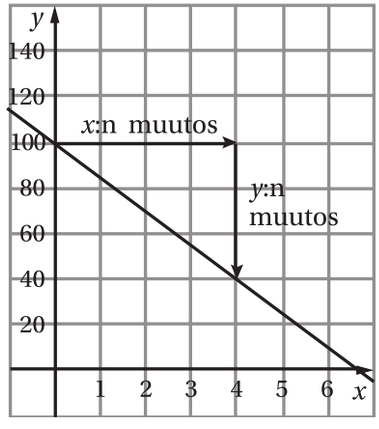
Viereisen suoran kulmakerroin on

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{120}{3} = 40.$$



Viereisen suoran kulmakerroin on

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{-60}{4} = -15.$$

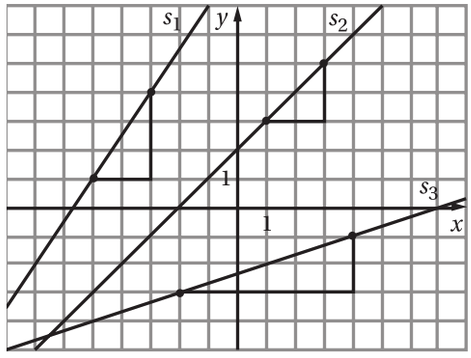


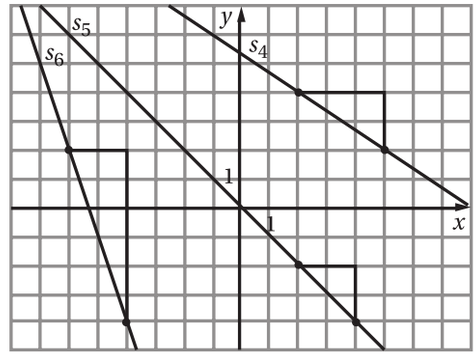
Kulmakerroin ilmaisee, kuinka suuri pisteen y-koordinaatin muutos on aina silloin, kun pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä.

Kulmakertoimen merkki

Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen, ja laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen.

ESIMERKKI 3 Määritä suorien kulmakertoimet.*





RATKAISU

Kulmakerroin voidaan määrittää minkä tahansa kahden suoralla olevan pisteen avulla. Kulmakerroin voidaan lukea suoralle piirretystä apukolmiosta ottamalla lisäksi huomioon kulmakertoimen merkki. Apukolmion kateettien pituudet ovat koordinaattien muutosten itseisarvot.

Ensimmäisen kuvion nousevien suorien kulmakertoimet ovat:

suora s_1: $\frac{3}{2}$ suora s_2: $\frac{2}{2} = 1$ suora s_3: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

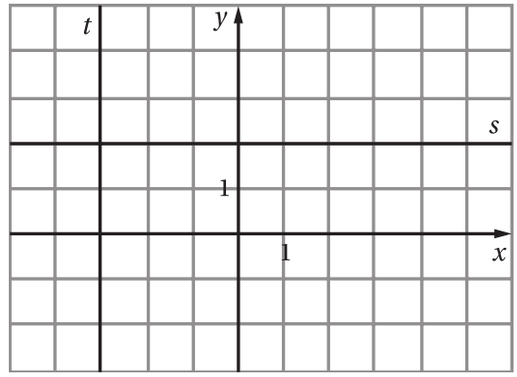
Toisen kuvion laskevien suorien kulmakertoimet ovat:

suora s_4: $-\frac{2}{3}$ suora s_5: $-\frac{2}{2} = -1$ suora s_6: $-\frac{6}{2} = -3$.

* Suoria on merkitty samalla kirjaimella s, ja ne on eroteltu toisistaan *alaindeksinä* olevalla numerolla 1, 2 jne.

JOHDANTO-ESIMERKKI 4

Määritä kuvioon piirrettyjen koordinaattiakselien suuntaisten suorien s ja t kulmakertoimet.



RATKAISU

Kun x-akselin suuntaisella suoralla s siirrytään pisteestä toiseen, y-koordinaatin muutos on aina 0. Siis suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ on 0. x-akselin suuntaisen suoran s kulmakerroin on 0.

Kun y-akselin suuntaisella suoralla t siirrytään pisteestä toiseen, x-koordinaatin muutos on aina 0. Koska nollalla ei voi jakaa, suhdetta $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ ei ole määritelty. y-akselin suuntaisella suoralla t ei ole kulmakerrointa.

VASTAUS

x-akselin suuntaisen suoran s kulmakerroin on 0.
y-akselin suuntaisella suoralla t ei ole kulmakerrointa.

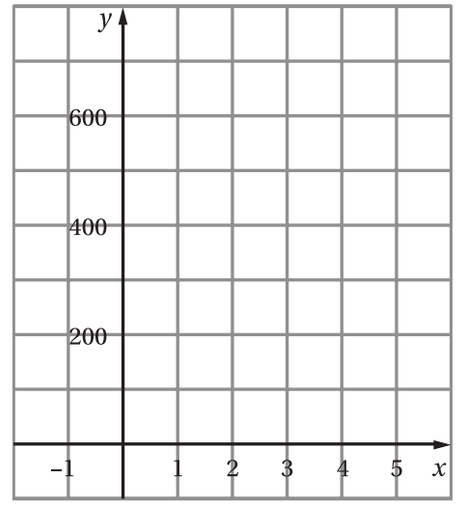
Koordinaattiakselien suuntaisten suorien kulmakertoimet

x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.

y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

ESIMERKKI 5

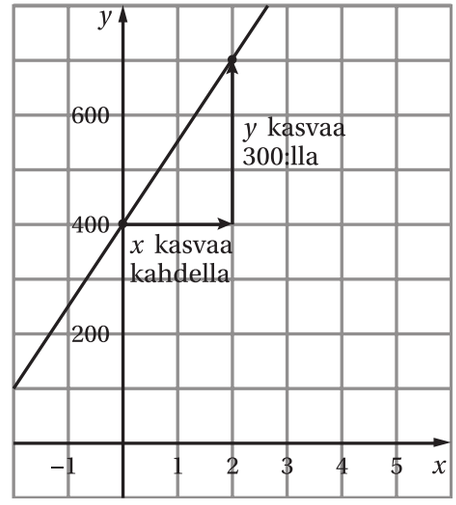
Piirrä viereiseen koordinaatistoon suora, joka kulkee pisteen $(0, 400)$ kautta ja jonka kulmakerroin on
a) 150 **b)** -100.



RATKAISU

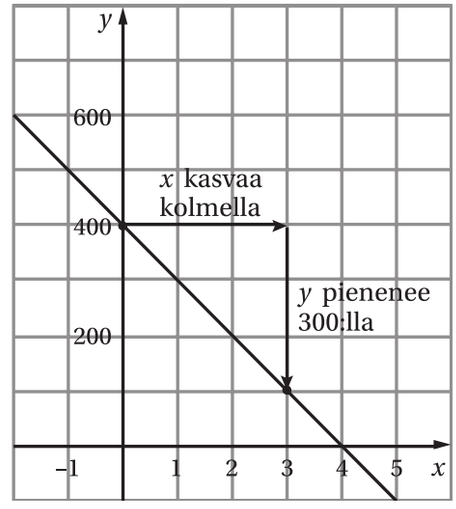
a) Aina kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä yksiköllä, y-koordinaatti kasvaa 150:llä.

Koordinaatistoon on piirretty apukolmio alkaen pisteestä $(0, 400)$. x-koordinaattia on kasvatettu kahdella yksiköllä, jolloin y-koordinaatti kasvaa 300:lla.



b) Aina kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä yksiköllä, y-koordinaatti pienenee 100:lla.

Apukolmio on piirretty alkaen pisteestä $(0, 400)$. x-koordinaattia on kasvatettu kolmella yksiköllä, jolloin y-koordinaatti pienenee 300:lla.

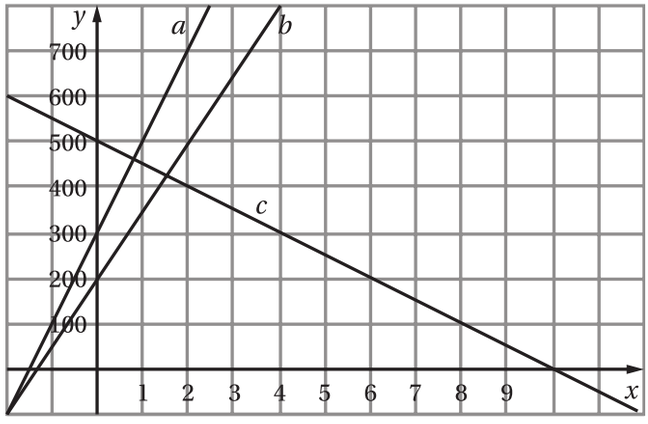


HARJOITUKSIA

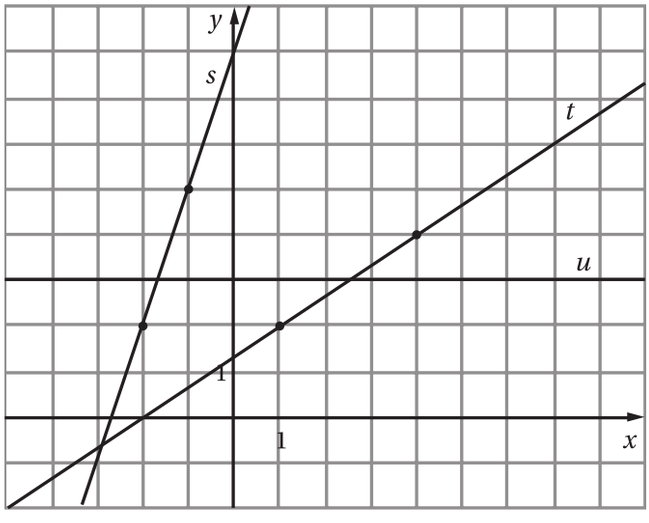
Sarja I

1. Lukion taidenäyttelyn avauduttua sunnuntaina kello 11.00 näyttelyyn saapui kello 11.00–12.30 välisenä aikana 120 vierasta. Ennusta koko kävijämäärä sulkemisaikaan kello 15:een mennessä olettaen, että kävijämäärän kertymistä kuvaa suora.

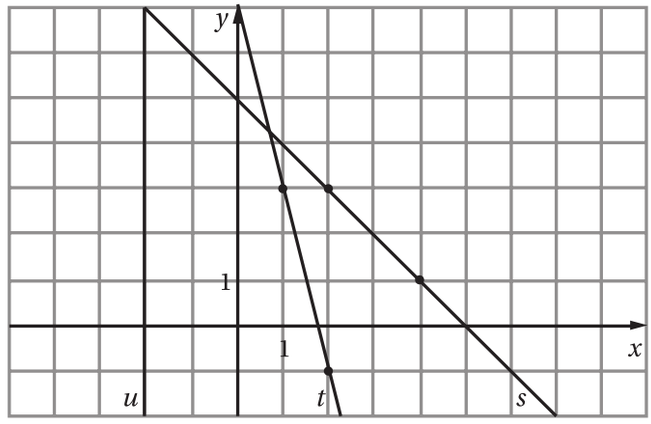
2. Määritä suorien kulmakertoimet.



3. Määritä suorien kulmakertoimet.



4. Määritä suorien kulmakertoimet.

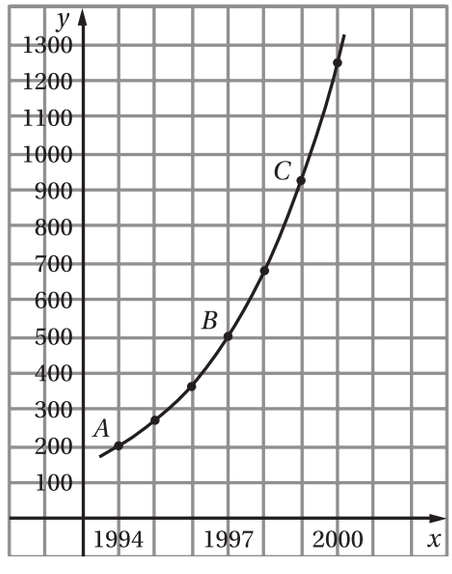


5. Koordinaatistoon on piirretty käyrä.

a) Kuinka paljon pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti kasvaa yhdellä yksiköllä lähdettäessä pisteestä A, B tai C?

b) Laske suhde $\dfrac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$, kun siirrytään pisteestä A pisteeseen B ja kun siirrytään pisteestä B pisteeseen C.

c) Voitaisiinko kuvion käyrälle määritellä kulmakerroin?



6. Suoran kulmakerroin on 5. Kuinka suoralla olevan pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti

a) kasvaa yhdellä

b) kasvaa neljällä

c) pienenee kolmella?

7. Suoran kulmakerroin on -20. Kuinka suoralla olevan pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti

a) kasvaa yhdellä

b) kasvaa viidellä

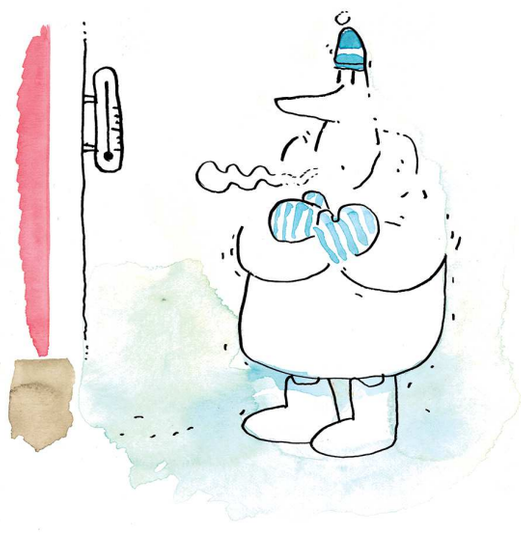
c) pienenee kahdella?

8. Vuorokauden keskilämpötila Sodankylässä on lokakuun 1. päivänä 3,2 °C ja lokakuun 31. päivänä $-3{,}4$ °C. Tällä välillä lämpötila laskee likimain suoraviivaisesti. Tiedot perustuvat mittauksiin vuosilta 1981–2010.

a) Mikä on lämpötilan muutos vuorokaudessa lokakuun aikana?

b) Mikä on vuorokauden keskilämpötila 20.10.?

c) Jatkuuko sama suoraviivainen muutos ympäri vuoden?



9. Piirrä suora, joka kulkee pisteen $(3, 2)$ kautta ja jonka kulmakerroin on

a) 2 **b)** -1 **c)** $-\frac{2}{3}$.

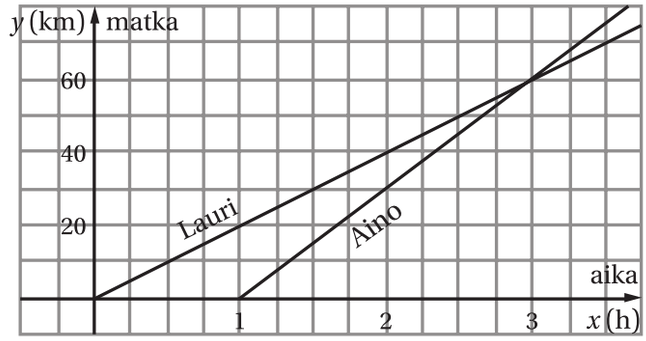
Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?

10. Aino pääsi aloittamaan päivän pyöräretken Laurin jo lähdettyä. Päättele kuviosta:

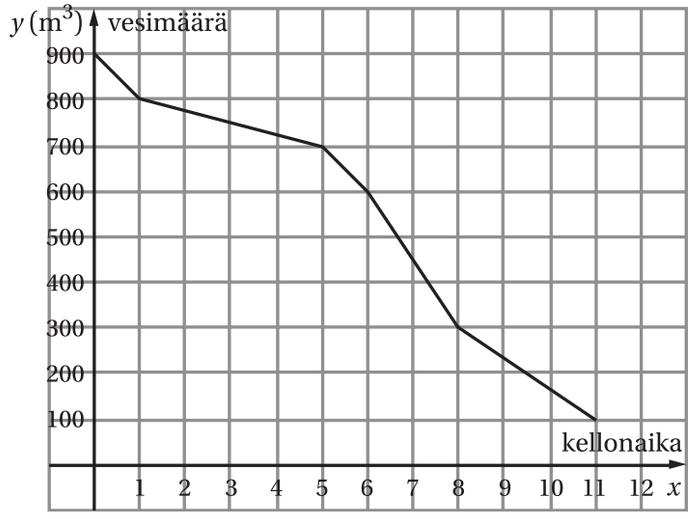
a) Millä nopeudella Aino ja Lauri pyöräilivät?

b) Kuinka paljon myöhemmin Aino lähti matkaan?

c) Kuinka pitkän matkan he olivat pyöräilleet, kun Aino tavoitti Laurin? Kuinka kauan Lauri oli tällöin pyöräillyt?



11. Asumalähiön vesitornin vesimäärä tarkistettiin keskiyöllä ja sen jälkeen kello 1, 5, 6, 8 ja 11. Saatujen lukemien avulla piirrettiin seuraava kuvaaja.



Tarkkailuaikana säiliöön ei lisätty vettä. Mihin aikaan taajaman vedenkulutus oli suurinta ja mihin aikaan pienintä? Kuinka suuri vedenkulutus tällöin oli (yksikkönä kuutiometriä tunnissa)?

12. Piirrä edellisen tehtävän mukaiseen koordinaatistoon suora, joka

a) kulkee pisteen $(0, 700)$ kautta ja jonka kulmakerroin on -75

b) kulkee pisteen $(12, 800)$ kautta ja jonka kulmakerroin on 50.

Mitä tapahtumaa säiliössä suora kuvaa?

13. Kirjaston lainausosaston päivittäistä kävijämäärää seurataan valokennoon liitetyn laskurin avulla. Aukioloajan kello 9–20 kuluessa kirjattiin seuraavat laskurin lukemat:

kello	9	11	14	17	18	20
lukema	0	72	480	665	724	986

Selvitä sopivan kuvaajan avulla ja laskemalla, mihin aikaan päivästä kirjaston käyttö oli hiljaisinta ja mihin aikaan vilkkainta. Mitkä olivat tällöin tuntia kohden lasketut kävijämäärät?

Sarja II

14. Omakotitalon öljysäiliössä oli itsenäisyyspäivänä 1 050 litraa ja joulupäivänä 710 litraa öljyä. Oletetaan, että öljyn määrä vähenee ajan myötä lineaarisesti. Kuinka paljon öljyä on jäljellä tammikuun viimeisenä päivänä, jolloin säiliölle on tilattu seuraava täyttö?

15. Heikki meni torille kello 7.30 mukanaan 120 litraa herukoita. Kello 10 hänellä oli jäljellä 70 litraa. Oletetaan, että marjojen vähenemistä kuvaa suora. Saako Heikki kaikki herukat myydyiksi ennen toriajan päättymistä kello 14?

16. Lämpötila 1,85 kilometrin korkeudessa oli -10 °C ja 2,60 kilometrin korkeudessa -17 °C. Lämpötilan riippuvuus korkeudesta on lineaarista.

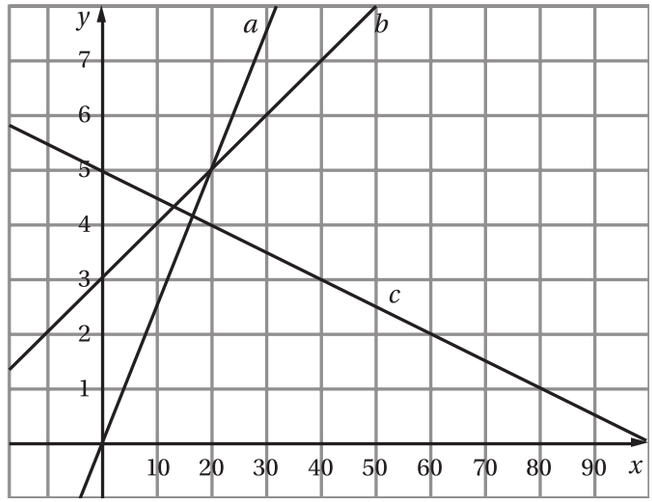
a) Mikä on lämpötilan muutos, kun noustaan yksi kilometri?

b) Arvioi lämpötila huipulla 3,10 kilometrin korkeudessa.

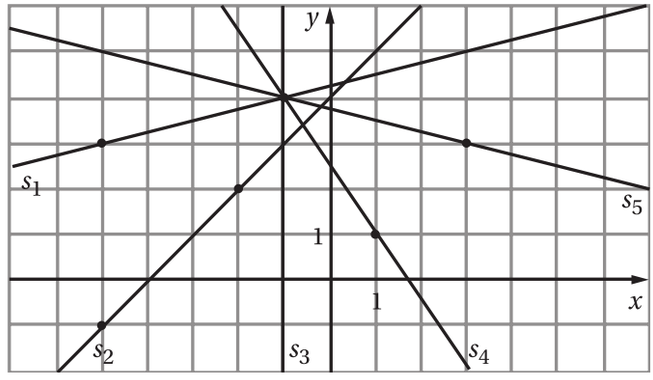
17. **a)** Mille kuvan suorista pätee, että x:n kasvaessa 20:lla y kasvaa 5:llä?

b) Määritä suorien kulmakertoimet.

c) Kuinka kullakin suoralla pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun x-koordinaatti kasvaa 100:lla?



18. Määritä suorien kulmakertoimet.



19. Suora kulkee pisteen $(-3, 1)$ ja

a) pisteen $(-2, 4)$

b) origon

c) pisteen $(2, 1)$

kautta. Määritä suoran kulmakerroin kuvion avulla.

20. Piirrä suora, joka kulkee pisteen $(-2, 3)$ kautta ja jonka kulmakerroin on

a) 1 **b)** -3 **c)** $-\frac{1}{2}$.

Missä pisteessä suora leikkaa x-akselin?

21. Suoran kulmakerroin on

a) 2 **b)** $-\frac{2}{3}$.

Kuinka suoralla olevan pisteen y-koordinaatti muuttuu, kun pisteen x-koordinaatti kasvaa kuudella? Entä kuinka y-koordinaatti muuttuu, kun x-koordinaatti pienenee kolmella?

22. Tuomas lähti päivän pyöräretkiosuudelle kaksi tuntia Ainon jälkeen. Aino pyöräilee nopeudella 15 km/h ja Tuomas nopeudella 25 km/h. Piirrä koordinaatistoon heidän etenemistään kuvaavat suorat (katso tehtävä 10). Päättele kuviosta ja tarkista laskemalla:

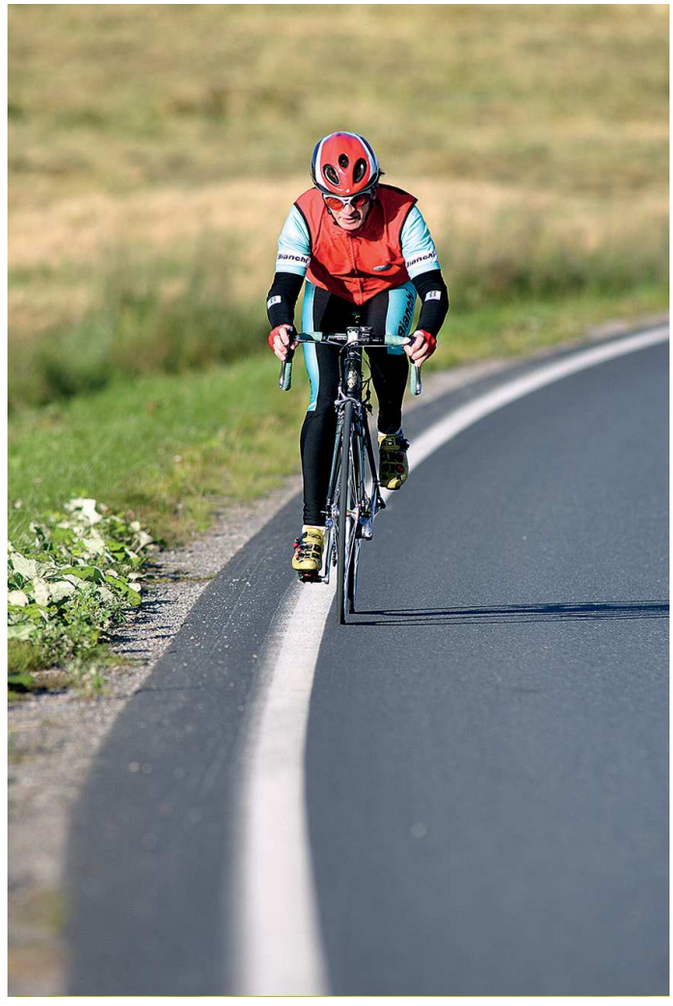
a) Kuinka kauan Tuomas saa pyöräillä tavoittaakseen Ainon?

b) Kuinka pitkän matkan kumpikin on tällöin pyöräillyt?

23. Liikenteen vilkkautta risteyksessä mitattiin valokennoon liitetyn laskurin avulla. Laskuri nollattiin kello 12 ja iltapäivän aikana saatiin seuraavat lukemat:

kello	12	13	15	16	18	21
lukema	0	1 305	2 904	4 410	8 705	10 231

Selvitä kuvaajan avulla ja laskemalla, mihin aikaan liikenne oli vilkkainta ja mihin aikaan hiljaisinta. Mikä oli tällöin liikennevirran suuruus risteyksessä (yksikkönä ajoneuvoa tunnissa)?



2 Kulmakertoimen laskeminen

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Määritä pisteiden

a) $(2, 1)$ ja $(5, 7)$

b) (x_1, y_1) ja (x_2, y_2)

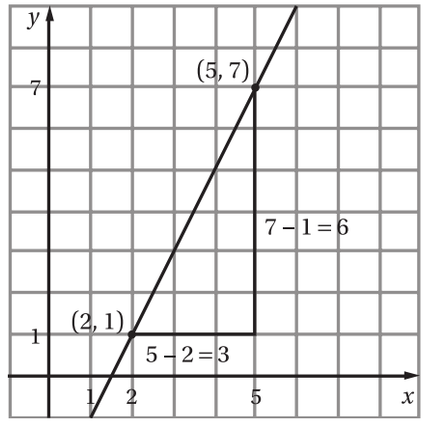
kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

RATKAISU

Merkitään suoran kulmakerrointa k. Lasketaan suhde

$$k = \frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}.$$

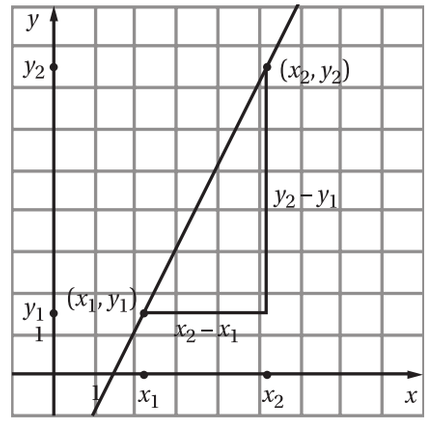
a)



Kun siirrytään pisteestä $(2, 1)$ pisteeseen $(5, 7)$, niin x-koordinaatin muutos on $5 - 2 = 3$ ja y-koordinaatin muutos on $7 - 1 = 6$. Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2.$$

b)



Kun siirrytään pisteestä (x_1, y_1) pisteeseen (x_2, y_2), niin x-koordinaatin muutos on $x_2 - x_1$ ja y-koordinaatin muutos on $y_2 - y_1$. Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

VASTAUS

a) 2

b) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Kulmakertoimen laskukaava

Jos suora kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, missä $x_1 \neq x_2$, niin suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kulmakerroin on siis pisteiden y-koordinaattien erotuksen suhde x-koordinaattien erotukseen.

Jos pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) x-koordinaatit ovat yhtä suuret eli $x_1 = x_2$, suora on y-akselin suuntainen. y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.

ESIMERKKI 2

Laske pisteiden $(-2, 7)$ ja $(4, -5)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin. Onko suora nouseva, laskeva vai x- tai y-akselin suuntainen?

RATKAISU

Käytetään suoran kulmakertoimen kaavaa.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pisteiden $(-2, 7)$ ja $(4, -5)$ y-koordinaattien -5 ja 7 erotuksen suhde x-koordinaattien 4 ja -2 erotukseen.

$$= \frac{-5 - 7}{4 - (-2)}$$

Lauseke voidaan näppäillä tässä muodossa symboliseen laskimeen.

$$= -2^*$$

Sievennys laskimella.

Kulmakertoimen lauseke voidaan sieventää myös ilman laskinta:

$$k = \frac{-5 - 7}{4 - (-2)} = \frac{-12}{4 + 2} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Koska kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva.

VASTAUS

Kulmakerroin on -2. Suora on laskeva.

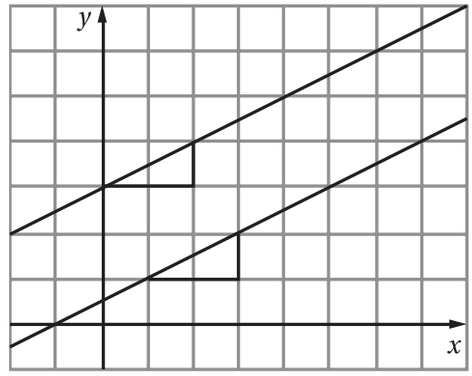
---

* Koordinaattien erotukset voitaisiin laskea myös toisin päin.

Kulmakertoimien avulla voidaan tutkia suorien yhdensuuntaisuutta.

Suorien yhdensuuntaisuusehto

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.



ESIMERKKI 3

Suora s_1 kulkee pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, 6)$ kautta, ja suora s_2 kulkee pisteiden $(-2, -4)$ ja $(8, 2)$ kautta. Ovatko suorat s_1 ja s_2 yhdensuuntaiset?

RATKAISU

Lasketaan suorien kulmakertoimet.

Pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, 6)$ kautta kulkevan suoran s_1 kulmakerroin on

$$k_1 = \frac{6-3}{4-(-1)}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

Pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, 6)$ y-koordinaattien 6 ja 3 erotuksen suhde x-koordinaattien 4 ja -1 erotukseen.

Pisteiden $(-2, -4)$ ja $(8, 2)$ kautta kulkevan suoran s_2 kulmakerroin on

$$k_2 = \frac{2-(-4)}{8-(-2)}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

Pisteiden $(-2, -4)$ ja $(8, 2)$ y-koordinaattien 2 ja -4 erotuksen suhde x-koordinaattien 8 ja -2 erotukseen.

Koska kulmakertoimet ovat yhtä suuret, suorat ovat yhdensuuntaiset.

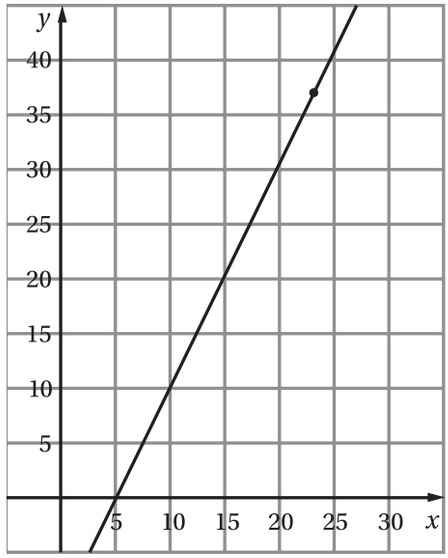
VASTAUS

Ovat.

ESIMERKKI 4

Suora kulkee pisteen $(5, 0)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on 2. Onko piste $(23, 37)$ suoralla?

RATKAISU



Vastaus ei selviä kuviosta.

Jos piste $(23, 37)$ on suoralla, niin pisteitä $(5, 0)$ ja $(23, 37)$ yhdistävän janan kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin 2.

Janan kulmakerroin on

$$\frac{37 - 0}{23 - 5}$$

$$= \frac{37}{18} \approx 2{,}06.$$

Pisteiden $(5, 0)$ ja $(23, 37)$ y-koordinaattien 37 ja 0 erotuksen suhde x-koordinaattien 23 ja 5 erotukseen.

Koska kulmakerroin ei ole yhtä suuri kuin suoran kulmakerroin 2, piste $(23, 37)$ ei ole suoralla.

VASTAUS

Ei ole.

HARJOITUKSIA

Sarja I

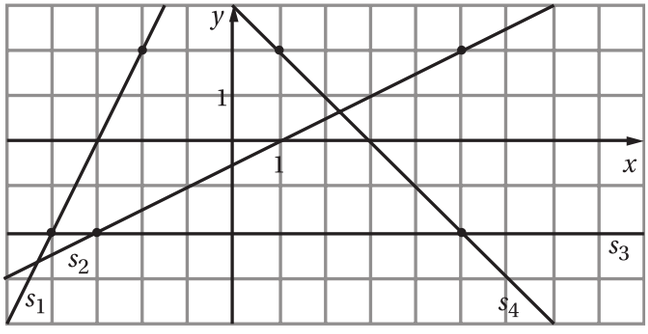
24. Suora kulkee pisteiden
a) $(6, 5)$ ja $(1, 0)$
b) $(-5, 0)$ ja $(3, -2)$
c) $(3, 4)$ ja $(-5, 4)$
d) $(13, 3)$ ja $(1, -5)$
kautta. Laske suoran kulmakerroin. Onko suora nouseva, laskeva vai x- tai y-akselin suuntainen?

25. Millä seuraavista lausekkeista voidaan laskea pisteiden $(6, 1)$ ja $(5, 3)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin?

a) $\dfrac{1-3}{6-5}$ **b)** $\dfrac{3-1}{6-5}$

c) $\dfrac{5-6}{3-1}$ **d)** $\dfrac{3-1}{5-6}$

26. Määritä suorien kulmakertoimet.



27. Suora s_1 kulkee pisteiden $(-4, -1)$ ja $(-2, 3)$ kautta ja suora s_2 pisteiden $(0, 0)$ ja $(3, 5)$ kautta. Suora s_3 kulkee pisteiden $(3, 1)$ ja $(5, 5)$ kautta. Tutki, ovatko suorat yhdensuuntaiset.

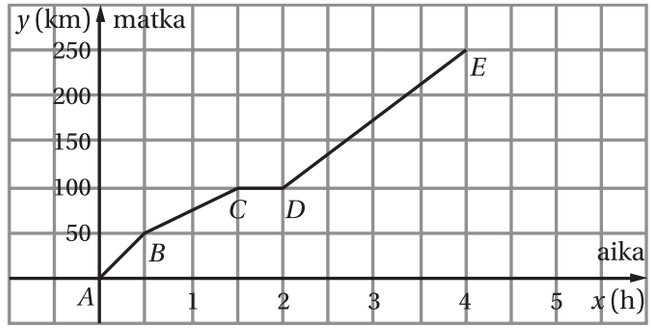
28. Kartan koordinaatistossa toisen lentokoneen lentoreitti kulkee suoraviivaisesti pisteiden $(-15, 3)$ ja $(0, 9)$ kautta ja toisen lentokoneen reitti pisteiden $(0, -12)$ ja $(9, -9)$ kautta. Leikkaavatko lentoreitit toisensa?

29. Suora kulkee pisteen $A = (1, 6)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on 3. Onko piste
a) $B = (15, 49)$
b) $C = (-10, -27)$
suoralla?

30. Nelikulmion $ABCD$ kärjet ovat pisteissä $A = (-13, 16)$, $B = (4, -10)$, $C = (23, -5)$ ja $D = (6, 21)$. Osoita, että nelikulmio $ABCD$ on suunnikas.
(Ohje: Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.)

31. Määritä sellainen x-akselin piste $A = (x, 0)$, että pisteiden A ja $B = (3, 10)$ kautta kulkeva suora on yhdensuuntainen pisteiden $C = (4, -11)$ ja $D = (18, 1)$ kautta kulkevan suoran kanssa.

32. Kesämökille autoileva perhe noudattaa tarkkaan nopeusrajoituksia. Matkalla ohitetaan pitkä päällystystyömaa ja pysähdytään kerran huoltoasemalle ruokkimaan uupuneita lapsia. Murtoviiva kuvaa lähdöstä kuluneen ajan ja kuljetun matkan riippuvuutta.
Laske janojen AB, BC, CD ja DE kulmakertoimet. Mitä kulmakertoimet ilmaisevat?



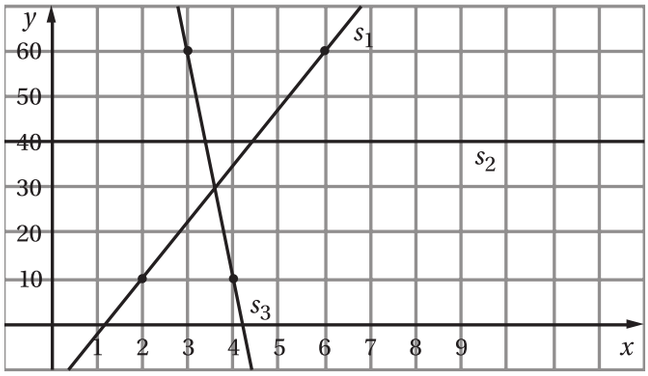
Sarja II

33. Suora kulkee pisteiden
a) $(-5, 1)$ ja $(-3, -2)$
b) $(0, -6)$ ja $(12, 0)$
kautta. Laske suoran kulmakerroin.

34. Suora s kulkee pisteiden $(-6, 11)$ ja $(-1, 4)$ kautta ja suora t pisteiden $(-2, 3)$ ja $(7, -10)$ kautta. Laske suorien kulmakertoimet. Kumpi suorista laskee jyrkemmin?

35. Suora kulkee pisteiden
a) $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ ja $(3, \frac{1}{6})$
b) $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ ja $(\frac{3}{8}, -\frac{7}{12})$
kautta. Määritä suoran kulmakerroin.

36. Laske suorien kulmakertoimet.



37. Suora leikkaa x-akselin pisteessä, jonka x-koordinaatti on -5, ja y-akselin pisteessä, jonka y-koordinaatti on 8. Mikä suoran kulmakerroin on?

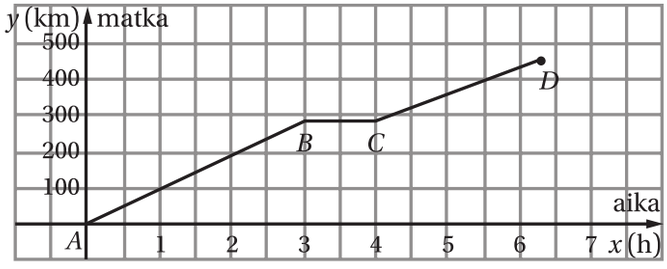
38. Suora s_1 kulkee pisteiden $(10, 473)$ ja $(-1, 11)$ kautta, ja suora s_2 kulkee pisteiden $(-10, -451)$ ja $(120, 5\,090)$ kautta. Ovatko suorat s_1 ja s_2 yhdensuuntaiset?

39. Onko piste $C = (18, -39)$ pisteiden $A = (2, 1)$ ja $B = (4, -4)$ kautta kulkevalla suoralla?

40. Nelikulmion $OABC$ kärki O on origossa ja muut kärjet ovat $A = (16, 7)$, $B = (1, 28)$ ja $C = (-15, 21)$. Onko nelikulmio $OABC$ suunnikas?

41. Nelikulmion $ABCD$ kolmeksi kärkipisteeksi on valittu $A = (-3, 2)$, $B = (11, 5)$ ja $C = (14, 14)$. Neljäs piste D valitaan y-akselilta. Voidaanko piste valita niin, että nelikulmio $ABCD$ on suunnikas? Jos voidaan, niin mikä y-akselin piste on valittava pisteeksi D?

42. Helsingin ja Pietarin etäisyys rautateitse on noin 450 km. Matkalla juna pysähtyy rajaasemalla. Koordinaatistoon piirretty murtoviiva kuvaa Helsingistä lähtemisestä kuluneen ajan ja kuljetun matkan riippuvuutta.
Laske janojen AB, BC ja CD likimääräiset kulmakertoimet. Mitä kulmakertoimet ilmaisevat?

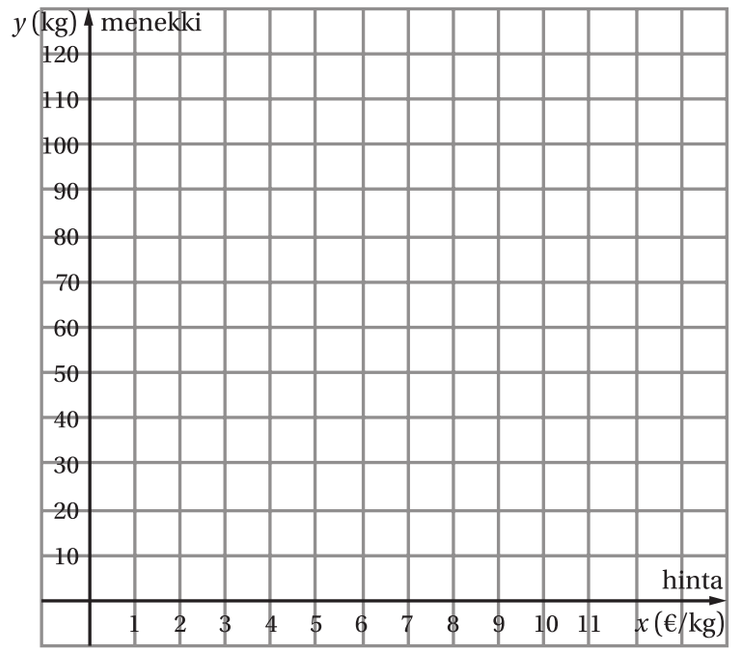


3 Suoran yhtälö

ONGELMA

Kauppiaan kokemuksen mukaan luomujauhelihan päivämenekin (kg) riippuvuuden kilogrammahinnasta x (€/kg) ilmaisee funktio $f(x) = -10x + 150$. Laske jauhelihan menekki, kun kilohinta on 5, 6, 7, 8, 9 ja 10 euroa. Piirrä funktion kuvaaja. Kuinka menekki muuttuu, kun hinta x kasvaa yhden yksikön?

kilohinta (€/kg) x	menekki (kg) $f(x) = -10x + 150$	kuvaajan piste (x, y)
5		
6		
7		
8		
9		
10		



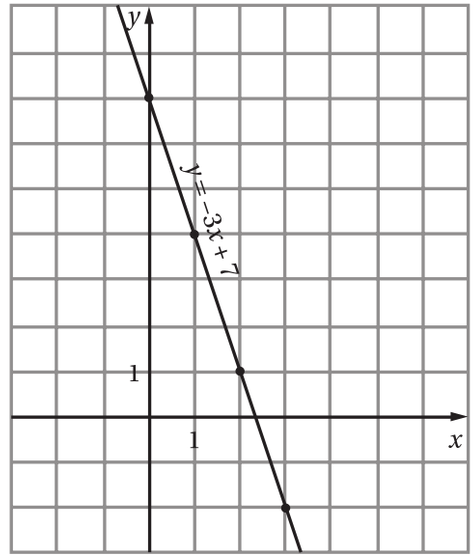
JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Piirrä funktion $f(x) = -3x + 7$ kuvaaja.

RATKAISU

Valitaan muuttujan x arvoja, lasketaan funktion $f(x) = -3x + 7$ arvoja ja merkitään vastaavat pisteet koordinaatistoon. Kuvaajan pisteen x-koordinaatti on muuttujan arvo ja y-koordinaatti funktion arvo.

x	$f(x) = -3x + 7$	(x, y)
0	$-3 \cdot 0 + 7 = 7$	$(0, 7)$
1	$-3 \cdot 1 + 7 = 4$	$(1, 4)$
2	$-3 \cdot 2 + 7 = 1$	$(2, 1)$
3	$-3 \cdot 3 + 7 = -2$	$(3, -2)$



Arvojen laskemista varten funktio f voidaan myös määritellä symboliseen laskimeen (Define $f(x) = -3x + 7$).

Funktion $f(x) = -3x + 7$ kuvaaja on suora. Kun muuttujan x arvo kasvaa yhden yksikön, funktion arvo pienenee aina 3 yksikköä. Suoran kulmakerroin on lausekkeen $-3x + 7$ ensimmäisen asteen termin kerroin -3.

Suoran jokaisen pisteen y-koordinaatti lasketaan x-koordinaatista lausekkeella $-3x + 7$. Siis jokaisen suoralla olevan pisteen koordinaatit x ja y toteuttavat yhtälön $y = -3x + 7$.

Suoran yhtälö

Pisteet (x, y), joiden koordinaatit x ja y toteuttavat yhtälön $y = kx + b$, muodostavat suoran. Sanotaan, että yhtälö $y = kx + b$ on kyseisen *suoran yhtälö*.

Suoran $y = kx + b$ kulmakerroin

Suoran $y = kx + b$ kulmakerroin on muuttujan x kerroin k.

Esimerkiksi edellä johdantoesimerkissä 1 piirretyn suoran $y = -3x + 7$ kulmakerroin on -3.

ESIMERKKI 2 Onko piste $(16, -41)$ suoralla $y = -3x + 7$?

RATKAISU Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $(16, -41)$ koordinaatit $x = 16$ ja $y = -41$ suoran yhtälön $y = -3x + 7$.

$y = -3x + 7$ Yhtälöön sijoitetaan pisteen $(16, -41)$ koordinaatit $x = 16$ ja $y = -41$.

$-41 = -3 \cdot 16 + 7$

$-41 = -48 + 7$

$-41 = -41$

tosi

Koska pisteen $(16, -41)$ koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön, piste on suoralla.

VASTAUS On.

JOHDANTO-ESIMERKKI 3

Missä pisteessä suora $y = \frac{2}{3}x - 4$ leikkaa y-akselin?

RATKAISU

Suoran ja y-akselin leikkauspiste on se suoran piste, jonka x-koordinaatti on 0. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan, kun suoran yhtälöön sijoitetaan $x = 0$.

$$y = \frac{2}{3}x - 4 \qquad \text{Sijoitetaan } x = 0.$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4$$

Leikkauspisteen y-koordinaatti on suoran yhtälön $y = \frac{2}{3}x - 4$ vakiotermi -4. Leikkauspiste on $(0, -4)$.

VASTAUS

$(0, -4)$

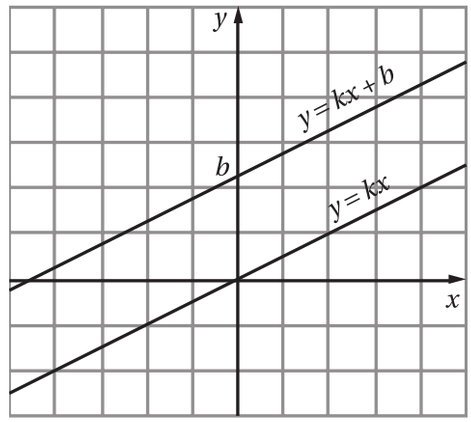
Suoran $y = kx + b$ ja y-akselin leikkauspiste

Suora $y = kx + b$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.

Siis suoran yhtälön

$y = kx + b$

vakiotermi b on suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti.



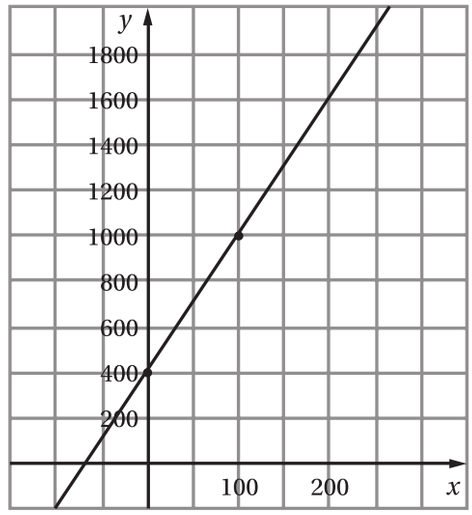
Origon kautta kulkeva suora

Jos vakiotermi b on nolla, suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 0)$ eli origossa. Siis origon kautta kulkevien suorien yhtälöt ovat muotoa

$y = kx$.

ESIMERKKI 4

Määritä kuvioon piirretyn suoran yhtälö.



RATKAISU

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, missä k on suoran kulmakerroin ja b on suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti.

Suora kulkee pisteiden $(0, 400)$ ja $(100, 1\,000)$ kautta, joten

$$k = \frac{1\,000 - 400}{100 - 0}$$

$$= 6.$$

Pisteiden $(0, 400)$ ja $(100, 1\,000)$ y-koordinaattien $1\,000$ ja 400 erotuksen suhde x-koordinaattien 100 ja 0 erotukseen.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 400)$, joten $b = 400$.

Suoran yhtälö on $y = 6x + 400$.

VASTAUS

$y = 6x + 400$*

* Tulos voidaan tarkistaa tutkimalla, toteuttavatko pisteen $(100, 1000)$ koordinaatit yhtälön.

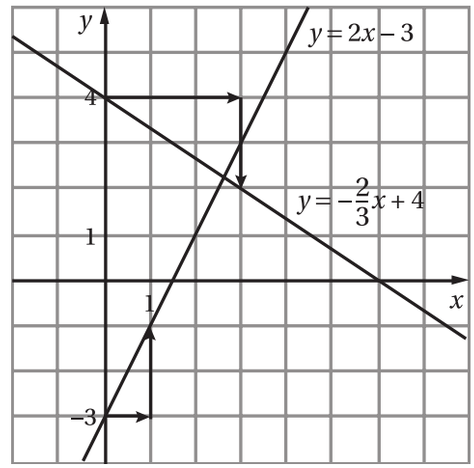
$1000 = 6 \cdot 100 + 400$
$1000 = 1000$
tosi

ESIMERKKI 5 Piirrä suorat $y = 2x - 3$ ja $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

RATKAISU

Tapa 1. Piirretään suoran ja y-akselin leikkauspisteeseen kulmakerrointa vastaava apukolmio.

Suora $y = 2x - 3$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3)$. Suoran kulmakerroin on 2, joten suora on nouseva. Piirretään apukolmio, jossa $\frac{y\text{:n muutos}}{x\text{:n muutos}} = 2$, esimerkiksi $\frac{2}{1}$.



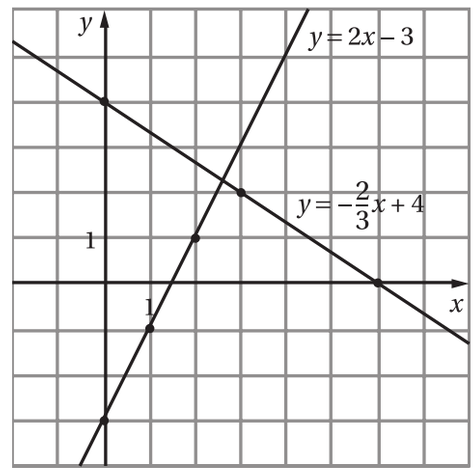
Suora $y = -\frac{2}{3}x + 4$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 4)$. Suoran kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$, joten suora on laskeva.

Kuvan apukolmiossa $\frac{y\text{:n muutos}}{x\text{:n muutos}} = \frac{-2}{3}$.

Tapa 2. Lasketaan suoran pisteitä niin, että annetaan x:lle arvoja ja lasketaan suoran yhtälön avulla vastaavat y:n arvot. Arvojen laskemista varten voidaan myös määritellä symboliseen laskimeen funktiot, joiden lausekkeet ovat $2x - 3$ ja $-\frac{2}{3}x + 4$.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
0	$2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
2	$2 \cdot 2 - 3 = 1$	$(2, 1)$

x	$y = -\frac{2}{3}x + 4$	(x, y)
0	$-\frac{2}{3} \cdot 0 + 4 = 4$	$(0, 4)$
3	$-\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = -2 + 4 = 2$	$(3, 2)$
6	$-\frac{2}{3} \cdot 6 + 4 = -4 + 4 = 0$	$(6, 0)$



Suoran $y = kx + b$ piirtäminen

Suoran $y = kx + b$ voi piirtää niin, että laaditaan suoran ja y-akselin leikkauspisteestä $(0, b)$ alkava apukolmio, jossa suhde $\frac{y\text{:n muutos}}{x\text{:n muutos}}$ on kulmakertoimen k suuruinen.

Toinen tapa on laskea yhtälön $y = kx + b$ avulla suoran pisteitä. Suoran piirtämiseen riittää kaksi pistettä, mutta varmuuden vuoksi kannattaa laskea kolmaskin piste.

Laskettavien pisteiden x-koordinaatit voi valita vapaasti. Ne kannattaa kuitenkin valita niin, että y-koordinaatin merkitseminen koordinaatistoon on helppoa.

> Kun esimerkissä 5 laskettiin suoran $y = -\frac{2}{3}x + 4$ pisteitä, valittiin kolmella jaollisia x:n arvoja, jolloin y-koordinaatit olivat kokonaislukuja.

HARJOITUKSIA

Sarja I

43. Onko piste $(4, -7)$ suoralla, jonka yhtälö on

a) $y = 2x - 1$ **b)** $y = -3x + 5$?

44. Mikä suoran kulmakerroin on? Mikä on suoran ja y-akselin leikkauspiste?

a) $y = 12x - 30$ **b)** $y = x + 2$

c) $y = \frac{2}{3}x$ **d)** $y = 7 - 3x$

e) $y = 5$

45. Muodosta suoran yhtälö.

a) Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -5)$, ja suoran kulmakerroin on 6.

b) Suora kulkee pisteen $(0, 4)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on -1.

c) Suora kulkee origon kautta, ja suoran kulmakerroin on $1{,}6$.

46. Muodosta yhtälö suoralle, joka on yhdensuuntainen suoran $y = -3x + 11$ kanssa ja joka leikkaa y-akselin

a) pisteessä $(0, 1)$

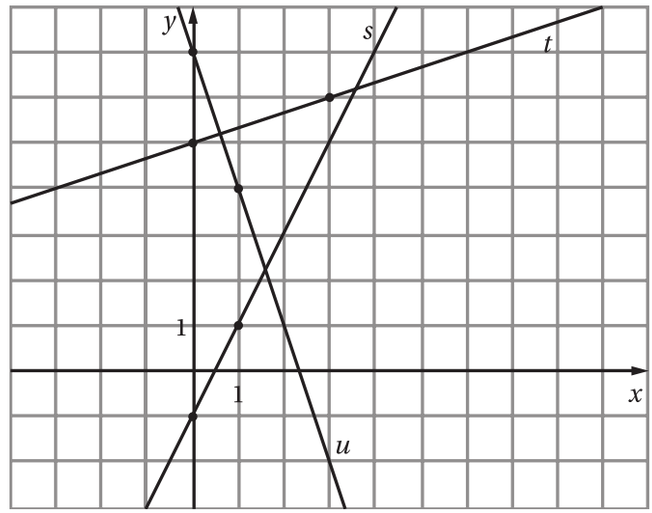
b) pisteessä $(0, -4)$

c) origossa.

47. Piirrä suorat $y = 2x - 1$ ja $y = -3x + 7$.

48. Piirrä suorat $y = \frac{2}{3}x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ja $y = 3$.

49. Muodosta suorien yhtälöt.



50. Määritä suoran $y = -\frac{3}{2}x + 1$ piste, jonka

a) x-koordinaatti on $\frac{5}{6}$

b) y-koordinaatti on 3.

51. Määritä suoran yhtälön vakiotermi b niin, että suora kulkee pisteen $(4, 1)$ kautta, ja piirrä suora.

a) $y = -x + b$ **b)** $y = \frac{2}{3}x + b$

Sarja II

52. Mikä suoran kulmakerroin on? Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?

a) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ **b)** $y = 5 - x$

c) $y = -3$

53. Mitkä seuraavista suorista ovat keskenään yhdensuuntaiset?

s_1: $y = 3x - 1$ s_2: $y = x - 4$

s_3: $y = 3$ s_4: $y = 3x - 4$

s_5: $y = -x$ s_6: $y = 3 - x$

54. Muodosta yhtälö suoralle, joka leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -4)$ ja joka on yhdensuuntainen suoran

a) $y = x + 7$ **b)** $y = -\frac{2}{7}x - 11$ **c)** $y = 1$

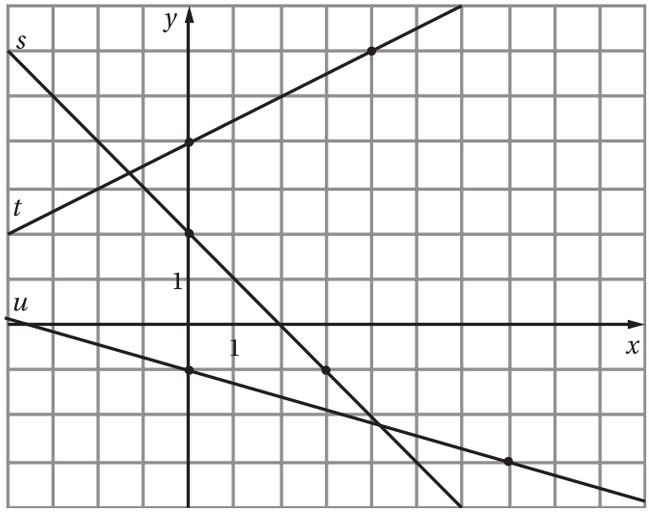
kanssa.

55. Missä pisteessä suora $y = 3x - 5$ leikkaa y-akselin? Piirrä suora. Onko piste $(15, 40)$ suoralla?

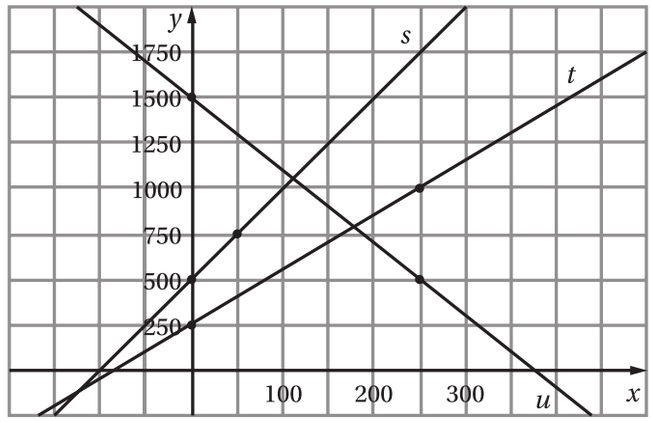
56. Mikä suoran kulmakerroin on? Piirrä suora.

a) $y = -x + 2$ **b)** $y = \frac{4}{3}x - 3$

57. Muodosta suorien yhtälöt.



58. Muodosta suorien yhtälöt.



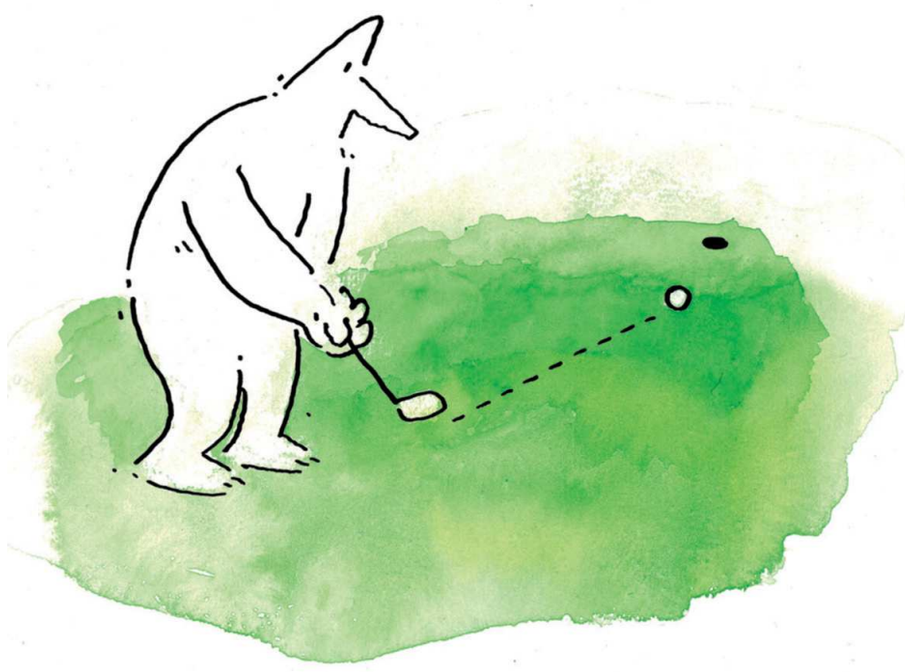
59. Piirrä edellisen tehtävän koordinaatistoon suorat $y = 10x$, $y = -5x + 1750$ ja $y = x + 750$.

60. Määritä suoran $y = \frac{1}{4}x - 1$ piste, jonka x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret.

61. Määritä suoran kulmakerroin k niin, että suora $y = kx - \frac{2}{3}$ kulkee pisteen

a) $(4, 2)$ **b)** $(4, -4)$

kautta. Piirrä suora.

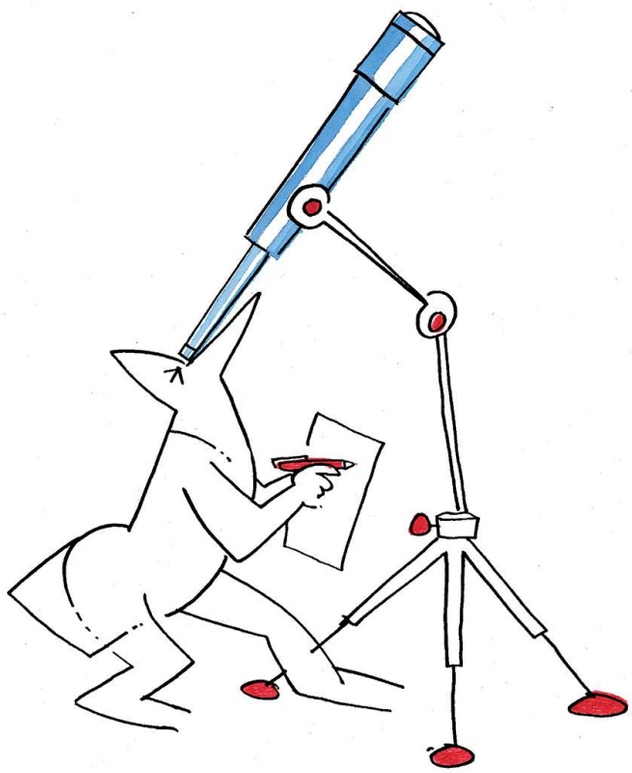


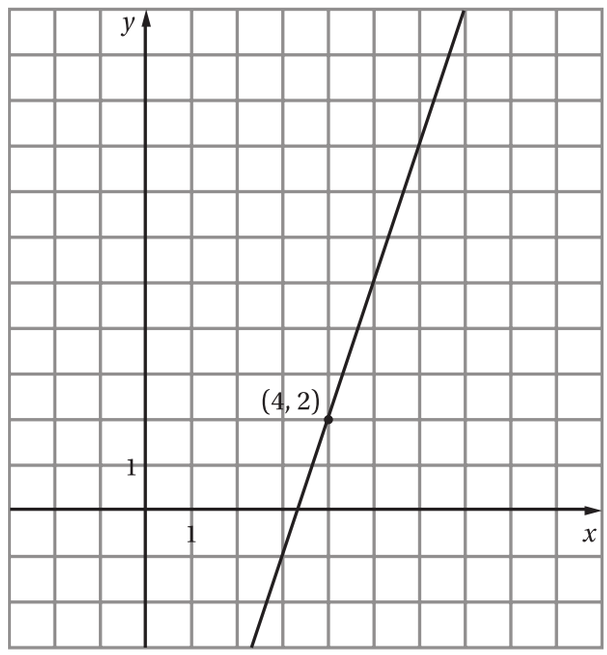
7 Suoran yhtälön muodostaminen

ONGELMA

Suora kulkee pisteen $(4, 2)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on 3. Kun pisteestä $(4, 2)$ siirrytään pisteeseen (x, y), niin x-koordinaatin muutos on $x-4$ ja y-koordinaatin muutos $y-2$. Muodosta taulukon pisteille (x, y) erotukset $x-4$ ja $y-2$ ja päättele, onko piste (x, y) suoralla.

(x, y)	$x-4$	$y-2$	Onko suoralla?
(6, 8)			
(5,4; 6,3)			
(15, 35)			
(24, 65)			
(104, 302)			
(–6, –28)			





JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Muodosta yhtälö suoralle,

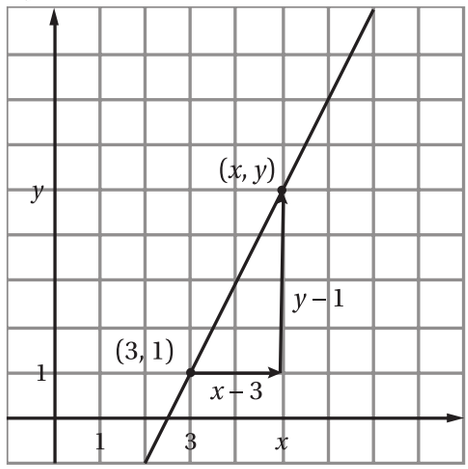
a) joka kulkee pisteen $(3, 1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on 2

b) joka kulkee pisteen (x_1, y_1) kautta ja jonka kulmakerroin on k.

RATKAISU

Muodostetaan yhtälö, jonka suoralla olevan pisteen (x, y) koordinaatit toteuttavat.

a)



Suoran kulmakerroin 2 on y-koordinaatin muutoksen suhde x-koordinaatin muutokseen.

Kun siirrytään pisteestä $(3, 1)$ suoran pisteeseen (x, y), niin x-koordinaatin muutos on $x - 3$ ja y-koordinaatin muutos $y - 1$. Koska kulmakerroin on 2, y-koordinaatin muutos on kaksi kertaa niin suuri kuin x-koordinaatin muutos.

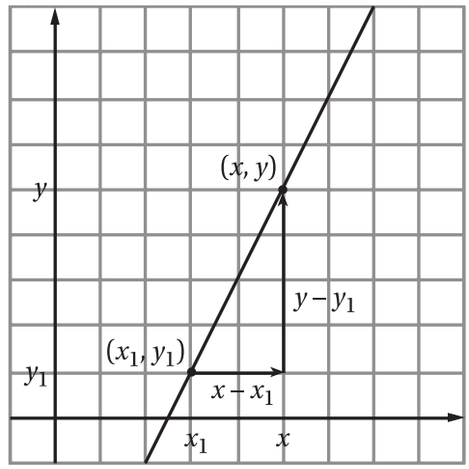
$y - 1 = 2(x - 3)$ Ratkaistaan yhtälöstä y.

$y - 1 = 2x - 6$ $\mid + 1$

$y = 2x - 5$

Suoran yhtälö on $y = 2x - 5$.

b)



Suoran kulmakerroin k on y-koordinaatin muutoksen suhde x-koordinaatin muutokseen.

Kun siirrytään pisteestä (x_1, y_1) suoran pisteeseen (x, y), niin x-koordinaatin muutos on $x - x_1$ ja y-koordinaatin muutos $y - y_1$. Koska kulmakerroin on k, y-koordinaatin muutos on k kertaa niin suuri kuin x-koordinaatin muutos.

$y - y_1 = k(x - x_1)$

VASTAUS

a) $y = 2x - 5$ **b)** $y - y_1 = k(x - x_1)$

Suoran yhtälön muodostaminen

Jos suora kulkee pisteen (x_1, y_1) kautta ja suoran kulmakerroin on k, niin suoran yhtälö muodostetaan kaavalla

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Suoran yhtälö saadaan muotoon $y = kx + b$, kun yhtälöstä ratkaistaan y.

Kaavalla ei voida muodostaa y-akselin suuntaisen suoran yhtälöä, koska y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. y-akselin suuntaisen suoran yhtälö muodostetaan esimerkissä 3.

ESIMERKKI 2

Muodosta suoran yhtälö, kun

a) suora kulkee pisteen $(1, 3)$ kautta ja suoran kulmakerroin on -2

b) suora kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $\frac{1}{3}$.

RATKAISU

a) Käytetään suoran yhtälön kaavaa.

$y - y_1 = k(x - x_1)$ — Sijoitetaan kulmakerroin $k = -2$ ja pisteen $(1, 3)$ koordinaatit $x_1 = 1$ ja $y_1 = 3$.

$y - 3 = -2(x - 1)$ — Ratkaistaan y.

$y = -2x + 5$ — Ratkaisu symbolisella laskimella: solve(yhtälö, y).

Voidaan myös ratkaista:

$y - 3 = -2(x - 1)$

$y - 3 = -2x + 2 \quad | + 3$

$y = -2x + 5.$

b) $y - y_1 = k(x - x_1)$ — Sijoitetaan kulmakerroin $k = \frac{1}{3}$ ja pisteen $(2, -1)$ koordinaatit $x_1 = 2$ ja $y_1 = -1$.

$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$ — Ratkaistaan y.

$y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$ — Ratkaisu symbolisella laskimella.

$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

Voidaan myös ratkaista:

$$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-2)$$

$$y+1=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \qquad |-1$$

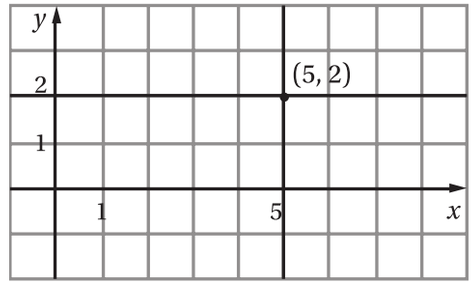
$$y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}-1$$

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}.$$

VASTAUS **a)** $y=-2x+5$ **b)** $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

ESIMERKKI 3

Muodosta yhtälö pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalle
a) x-akselin suuntaiselle suoralle
b) y-akselin suuntaiselle suoralle.



RATKAISU **a)** x-akselin suuntaisen suoran yhtälö voidaan muodostaa kahdella tavalla.

Tapa 1. Käytetään suoran yhtälön kaavaa. x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.

$y-y_1=k(x-x_1)$ Sijoitetaan kulmakerroin $k=0$ ja pisteen $(5, 2)$ koordinaatit $x_1=5$, $y_1=2$.

$y-2=0\cdot(x-5)$

$y-2=0$ Ratkaistaan y.

$y=2$

Tapa 2. Päätellään yhtälö: piste (x, y) on pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalla x-akselin suuntaisella suoralla, kun pisteen y-koordinaatti on 2 eli kun

$y=2$.

b) y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa, joten suoran yhtälön kaavaa ei voida käyttää. Yhtälö päätellään: piste (x, y) on pisteen $(5, 2)$ kautta kulkevalla y-akselin suuntaisella suoralla, kun pisteen x-koordinaatti on 5 eli kun

$x = 5$.

Yhtälössä ei esiinny y:tä, joten yhtälöä ei voi saattaa muotoon $y = kx + b$.

VASTAUS

a) $y = 2$ **b)** $x = 5$

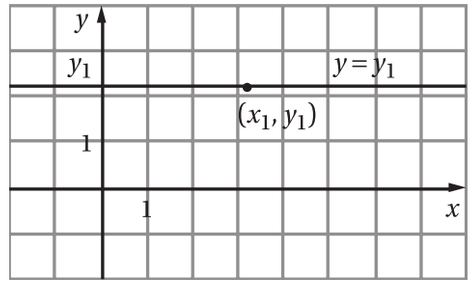
Koordinaattiakselien suuntaisten suorien yhtälöt

x-akselin suuntainen suora

Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$y = y_1$.

Yhtälön voi muodostaa niin, että kaavaan $y - y_1 = k(x - x_1)$ sijoitetaan $k = 0$. Suoran yhtälö voidaan myös päätellä: piste (x, y) on suoralla, kun sen y-koordinaatti on y_1.

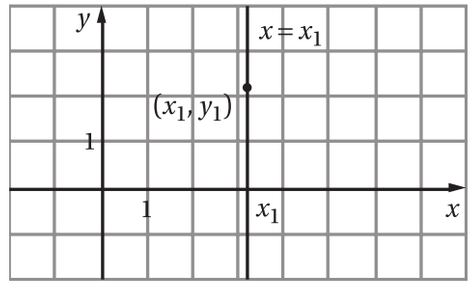


y-akselin suuntainen suora

Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$x = x_1$.

Yhtälö muodostetaan päättelemällä: piste (x, y) on suoralla, kun sen x-koordinaatti on x_1.



ESIMERKKI 4

Jäätelökioskin hoitaja on havainnut hyväksi nyrkkisäännön, jonka mukaan asteen nousu päivän lämpötilassa lisää kioskin päivämyyntiä aina 30 eurolla. Kun lämpötila oli 14 °C, päivämyynti oli 540 euroa.

a) Muodosta lauseke, jolla voidaan laskea myynnin suuruus y, kun lämpötila on x.

b) Kuinka suuri päivämyynti on, jos lämpötila on 7 °C?

c) Mikä lämpötilan tulee olla, jotta myynti olisi 800 euroa?

RATKAISU

a) Kioskinhoitajan nyrkkisääntö on pelkistettynä: aina kun x kasvaa yhden yksikön, y kasvaa 30:lla. Siis myynnin y riippuvuus lämpötilasta x on lineaarinen ja riippuvuutta kuvaavan suoran kulmakerroin on 30.

Suora kulkee pisteen $(14, 540)$ kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$y - y_1 = k(x - x_1)$ — Sijoitetaan kulmakerroin $k = 30$ ja pisteen $(14, 540)$ koordinaatit $x_1 = 14$, $y_1 = 540$.

$y - 540 = 30(x - 14)$ — Ratkaistaan yhtälöstä y.

$y = 30x + 120$

Jos lämpötila on x, niin myynnin suuruus on $y = 30x + 120$.

b) Kun lämpötila on 7 °C, niin päivämyynti on

$y = 30 \cdot 7 + 120$ — Yhtälöön $y = 30x + 120$ on sijoitettu $x = 7$.

$= 330$ (euroa).

c) Ratkaistaan, millä x:n arvolla lausekkeen $30x + 120$ arvo on 800.

$30x + 120 = 800$

$$x = \frac{680}{30} \approx 22{,}7$$

Jotta päivämyynti olisi 800 euroa, lämpötilan tulee olla 23 °C.

VASTAUS

a) $y = 30x + 120$ **b)** 330 euroa **c)** 23 °C

ESIMERKKI 5

Symbolinen laskin ilmaisee erään suoran yhtälön muodossa $y = \frac{-(8x-3)}{6}$. Saata yhtälö muotoon $y = kx + b$.

RATKAISU

Voidaan käyttää symbolisen laskimen Laajenna-toimintoa (expand).

$$y = \frac{-(8x-3)}{6} \qquad \text{expand}\left(y = \frac{-8(x-3)}{6}\right)$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{4x}{3}$$

$$y = -\frac{4x}{3} + \frac{1}{2} \qquad -\frac{4x}{3} = -\frac{4}{3}x$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$$

Voidaan myös muokata yhtälöä:

$$y = \frac{-(8x-3)}{6} \qquad \text{Poistetaan sulkeet osoittajasta.}$$

$$y = \frac{-8x+3}{6} \qquad \text{Käytetään jakolaskun osittelulakia } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

$$y = \frac{-\overset{4}{\cancel{8}}x}{\underset{3}{\cancel{6}}} + \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \qquad \text{Supistetaan.}$$

$$y = \frac{-4x}{3} + \frac{1}{2} \qquad \frac{-4x}{3} = -\frac{4}{3}x$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}.$$

VASTAUS

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$$

HARJOITUKSIA

Sarja I

62. Muodosta yhtälö suoralle, jonka kulmakerroin on 5 ja joka kulkee pisteen

a) $(1, 4)$ **b)** $(-2, 1)$

kautta.

63. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(3, -4)$ kautta ja jonka kulmakerroin on

a) -2 **b)** $\frac{1}{6}$?

64. Suora kulkee pisteen $(1, 4)$ kautta, ja suoran kulmakerroin on 3. Muodosta suoran yhtälö ja tutki yhtälön avulla, onko piste

a) $(11, 35)$ **b)** $(-4, -11)$

suoralla.

65. Muodosta yhtälö pisteen $(6, -5)$ kautta kulkevalle suoralle, joka on

a) x-akselin suuntainen

b) y-akselin suuntainen.

66. Suora kulkee pisteen $(3, 5)$ kautta, ja suora on yhdensuuntainen suoran $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$ kanssa. Muodosta suoran yhtälö.

67. Kalakauppias arvelee muikkujen viikkomyynnin vähenevän aina 60 kilogrammalla, kun kilogrammahintaa nostetaan yhdellä eurolla. Nykyisellä kilohinnalla 7 euroa muikkujen viikkomyynti on 300 kilogrammaa. Piirrä suora, joka kuvaa viikkomyynnin y riippuvuutta hinnasta x.

a) Mikä suoran kulmakerroin on?

b) Muodosta suoran yhtälö.

c) Kuinka suuri tämän mallin mukaan viikkomyynti on, kun kilohinta on $8{,}30$ euroa?

d) Mikä pitäisi asettaa muikkukilon hinnaksi, jotta viikkomyynti nousisi 400 kilogrammaan?

68. Opiskelija arvioi, että jokainen lisätunti tenttiin valmistautumisessa kasvattaa koetulosta $2{,}5$ pisteellä. Neljän tunnin opiskelulla hän sai kasaan 30 pistettä.

a) Muodosta yhtälö, joka kuvaa tämän teorian mukaisesti koetuloksen y riippuvuutta valmistautumisajasta x.

b) Mikä on pistesaalis kahdeksan tunnin valmistautumisella?

c) Kuinka kauan opiskelijan pitää opiskella, jotta hän saavuttaisi täydet sata pistettä?

69. Vuorokauden keskilämpötila Sodankylässä lokakuun 31. päivänä on $-3{,}4$ °C. Lokakuun aikana keskilämpötila alenee likimain suoraviivaisesti $0{,}22$ °C:lla vuorokaudessa.

a) Muodosta yhtälö, joka ilmaisee, mikä keskilämpötila y on lokakuun x. päivänä.

b) Mikä vuorokauden keskilämpötila on lokakuun 8. päivänä?

c) Minä päivänä keskilämpötila on ensimmäisen kerran pakkasen puolella?

70. Symbolinen laskin näyttää erään suoran yhtälön muodossa

a) $y = \frac{3x + 8}{12}$ **b)** $y = \frac{-2(2x - 3)}{3}$.

Saata yhtälö muotoon $y = kx + b$.

71. Muodosta muotoa $y = kx + b$ oleva yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ kautta ja jonka kulmakerroin on

a) $\frac{2}{3}$ **b)** $-\frac{2}{3}$.

Sarja II

72. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(3, 5)$ kautta ja jonka kulmakerroin on
a) 3 **b)** -1?

73. Muodosta suoran yhtälö, kun suora
a) kulkee pisteen $(-6, 8)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $-\frac{5}{4}$
b) kulkee origon kautta ja suoran kulmakerroin on $\frac{7}{11}$.

74. Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-4, 5)$ kautta ja joka on
a) x-akselin suuntainen
b) y-akselin suuntainen
c) suoran $y = -\frac{3}{4}x + 11$ suuntainen.

75. Kilpikonna lähtee pisteestä $(-3, 4)$ ja kulkee yläviistoon suoran $y = x - 12$ suuntaisesti. Tapaako kilpikonna pisteessä $(8, 15)$ odottavan toverinsa?

76. Mäkihyppääjä sai mäen kriittiseen pisteeseen 85 metriä yltäneestä hypystä 50 pituuspistettä. Jokaisesta lisämetristä saa kaksi pituuspistettä.
a) Muodosta yhtälö suoralle, joka kuvaa pituuspisteiden y riippuvuutta hypyn pituudesta x.
b) Kuinka monta pituuspistettä saa 62 metrin hypystä?
c) Kuinka pitkälle pitää hypätä, jos haluaa 61 pituuspistettä?

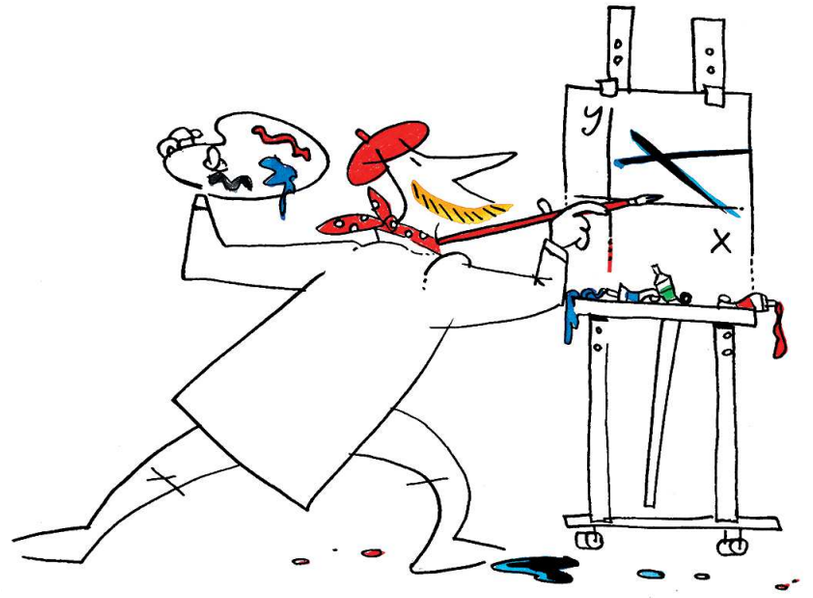
77. Ilkan pituus 9-vuotissyntymäpäivänä on 132,5 cm ja kasvuvauhti on parin vuoden ajan ollut 5,5 cm vuodessa. Muodosta yhtälö suoralle, jonka avulla voi ennustaa Ilkan pituuden y (cm), kun ikä on x (vuotta).
a) Kuinka pitkä Ilkka on 13-vuotiaana?
b) Minkä ikäisenä Ilkka pääsee huvipuiston vatkaimeen, jossa on pituusraja 140 cm?
c) Minkä ikäisenä Ilkka ei enää mahdu huvipuiston 3,50 metriä korkeasta portista kumartumatta?

78. Muodosta muotoa $y = kx + b$ oleva yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6})$ kautta ja jonka kulmakerroin on
a) $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{5}{3}$.

Suorien leikkauspiste

ONGELMA

Piirrä samaan koordinaatistoon suorat $y=-x-1$ ja $y=\frac{1}{2}x+5$ ja määritä kuviosta suorien leikkauspiste.

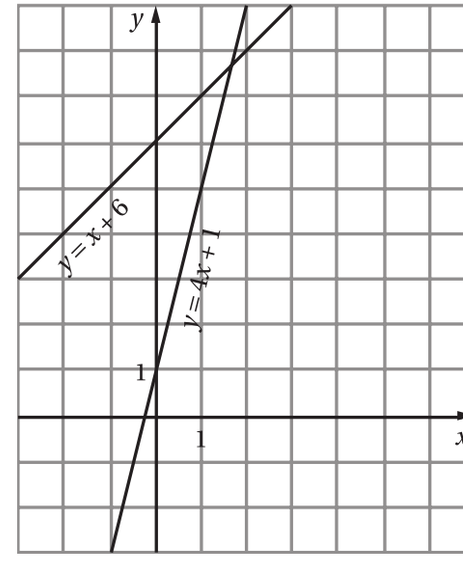


ESIMERKKI 1

Määritä suorien $y=4x+1$ ja $y=x+6$ leikkauspiste.

RATKAISU

Piirretään ratkaisun tueksi ja tarkistusta varten kuvio.



Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten sen koordinaatit x ja y toteuttavat molemmat yhtälöt $y=4x+1$ ja $y=x+6$. Koordinaatit x ja y toteuttavat *yhtälöparin*

$$\begin{cases} y = 4x+1 \\ y = x+6. \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari.

Tapa 1. Yhtälöpari voidaan ratkaista symbolisen laskimen Ratkaise yhtälöryhmä -toiminnolla.

Saadaan:

$x = \frac{5}{3}$ ja $y = \frac{23}{3}$.

Suorien leikkauspiste on piste $(\frac{5}{3}, \frac{23}{3})$.

Tapa 2. Kun muuttujan x arvona on leikkauspisteen x-koordinaatti, molempien lausekkeiden $4x+1$ ja $x+6$ arvo on leikkauspisteen y-koordinaatti eli lausekkeiden arvot ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan x-koordinaatti.

$4x + 1 = x + 6 \quad | -x$

$3x + 1 = 6 \quad | -1$

$3x = 5 \quad | : 3$

$x = \frac{5}{3}$

Yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

Leikkauspisteen x-koordinaatti on $\frac{5}{3}$.

Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan, kun x-koordinaatti sijoitetaan jommankumman suoran yhtälöön.

$y = x + 6$

$= \frac{5}{3} + 6 = \frac{5}{3} + \frac{18}{3} = \frac{23}{3}$

Yksinkertaisempaan yhtälöön $y = x + 6$ sijoitetaan $x = \frac{5}{3}$.

Leikkauspisteen y-koordinaatti on $\frac{23}{3}$. Leikkauspiste on $(\frac{5}{3}, \frac{23}{3})$.

VASTAUS $(\frac{5}{3}, \frac{23}{3})$*

* Leikkauspisteen koordinaatit voidaan antaa myös sekalukuina $(\frac{5}{3}, \frac{23}{3}) = (1\frac{2}{3}, 7\frac{2}{3})$. Koordinaatistoon merkitsemistä varten voidaan laskea likiarvot: $(\frac{5}{3}, \frac{23}{3}) \approx (1{,}7;\ 7{,}7)$.

Kahden suoran leikkauspiste

Suorien $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ leikkauspisteen koordinaatit löydetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 . \end{cases}$$

Yhtälöparin voi ratkaista symbolisella laskimella.

Toinen tapa on ratkaista x-koordinaatti yhtälöstä

$k_1x + b_1 = k_2x + b_2$.

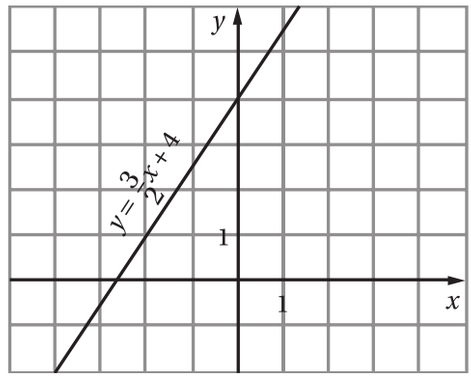
Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan, kun x-koordinaatti sijoitetaan kumman tahansa suoran yhtälöön.

ESIMERKKI 2

Määritä suoran $y = \frac{3}{2}x + 4$ ja x-akselin leikkauspiste.

RATKAISU

x-akselilla olevien pisteiden y-koordinaatti on 0. Suoran yhtälöön sijoitetaan $y = 0$ ja ratkaistaan x-koordinaatti.



Ratkaisu symbolisella laskimella.

$$\frac{3}{2}x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{8}{3}$$

Yhtälö voidaan ratkaista myös ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmällä.

Leikkauspiste on piste $(-\frac{8}{3}, 0)$.

VASTAUS

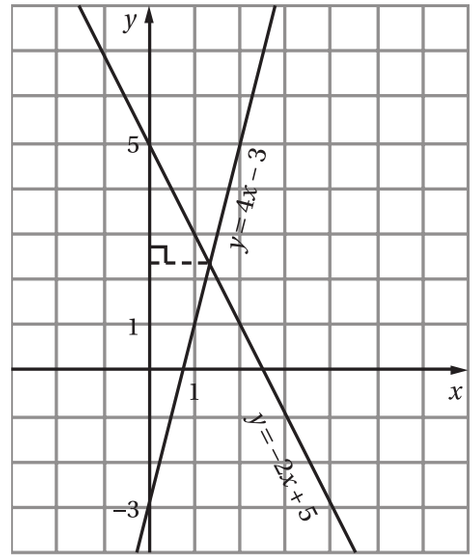
$(-\frac{8}{3}, 0)$

ESIMERKKI 3

Suorat $y = 4x - 3$ ja $y = -2x + 5$ rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

RATKAISU

Kolmion pinta-ala on puolet kolmion yhden sivun (kannan) pituuden ja tälle sivulle tai sen jatkeelle piirretyn korkeusjanan pituuden tulosta.



Valitaan kannaksi jana, jonka suorien leikkauspisteet erottavat y-akselista. Suorat leikkaavat y-akselin pisteissä $(0, -3)$ ja $(0, 5)$, joten kannan pituus on y-koordinaattien erotus $5 - (-3) = 8$.

Kolmion korkeus on suorien leikkauspisteestä y-akselille kohtisuoraan piirretyn janan pituus. Janan pituus on yhtä suuri kuin leikkauspisteen x-koordinaatti. Ratkaistaan leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$x = \frac{4}{3}$ ja $y = \frac{7}{3}$

Yhtälöparin ratkaisu symbolisella laskimella.

x-koordinaatti voidaan ratkaista myös yhtälöllä

$4x - 3 = -2x + 5.$

x-koordinaatti on $\frac{4}{3}$.

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{4}{3}$$
$$= \frac{16}{3}.$$

Puolet kannan ja korkeuden tulosta.

VASTAUS

$\frac{16}{3}$

HARJOITUKSIA

Sarja I

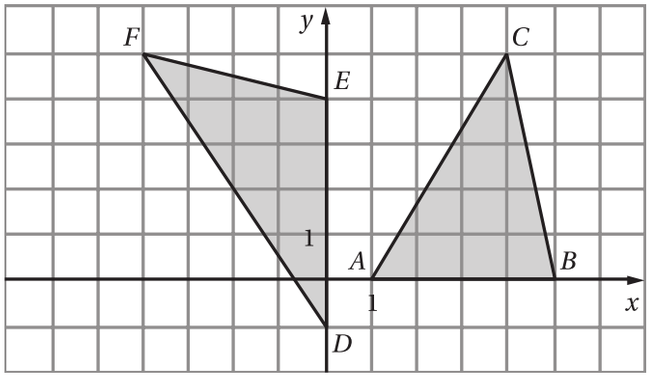
79. Määritä suorien leikkauspiste.
a) $y = 3x - 5$ ja $y = x + 3$
b) $y = 2x$ ja $y = 5x + 2$

80. Missä pisteessä suora leikkaa x-akselin?
a) $y = 2x - 6$ **b)** $y = 6x + 2$

81. Toisen lentokoneen lentoreitti noudattaa suoraa s, joka kartan koordinaatistossa kulkee pisteen $(50, 8)$ kautta ja jonka kulmakerroin on -3. Toisen lentokoneen lentoreitti noudattaa suoraa t, joka kulkee pisteen $(12, 10)$ kautta ja jonka kulmakerroin on 4. Missä pisteessä lentoreitit leikkaavat toisensa?

82. Kartan koordinaatistossa sähkölinja on suora, joka kulkee pisteen $(-3, 1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$. Samassa koordinaatistossa maantie kulkee pitkin suoraa $x = -2$ ja puhelinlinja pitkin suoraa $y = 4$.
a) Piirrä kuvio.
b) Missä pisteessä sähkölinja leikkaa maantien?
c) Missä pisteessä sähkölinja leikkaa puhelinlinjan?

83. Laske kolmioiden ABC ja DEF pinta-alat.



84. Suorat $y = x + 11$ ja $y = -2x - 7$ rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

85. **a)** Missä pisteissä suorat $y = 3x + 1$ ja $y = -2x + 6$ leikkaavat x-akselin?
b) Laske suorien ja x-akselin rajaaman kolmion pinta-ala.

86. Suojeltavaa ikimetsäaluetta rajaavat kartan koordinaatiston x-akseli sekä suorat $y = \frac{4}{3}x + 8$ ja $y = -2x + 5$. Koordinaatiston yksikkö vastaa 200 metriä luonnossa. Kuinka suuri metsäalueen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina hehtaarin tarkkuudella.

87. Suorat $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, $y = -2x - 3$ ja $y = \frac{3}{2}x - 3$ rajaavat kolmion. Määritä kolmion kärkipisteet ja laske kolmion pinta-ala.

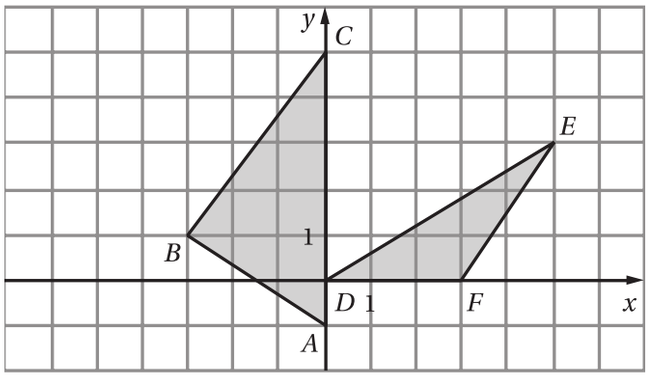
Sarja II

88. Missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa?
a) $y = 2x$ ja $y = x + 3$
b) $y = 3x + 4$ ja $y = -x - 2$

89. Missä pisteessä suora leikkaa x-akselin?
a) $y = \frac{1}{2}x - 7$ **b)** $y = -6x - 14$

90. Pisteen $(6, -5)$ kautta piirretään suora, joka on yhdensuuntainen pisteiden $(3, 1)$ ja $(7, -1)$ kautta kulkevan suoran kanssa. Missä pisteessä suora leikkaa
a) y-akselin
b) suoran $x = -6$
c) x-akselin
d) suoran $y = 6$?

91. Laske kolmioiden ABC ja DEF pinta-alat.



92. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka rajaavat y-akseli ja suorat

a) $y = x - 1$ ja $y = -2x + 5$

b) $y = -5x$ ja $y = -3x + 4$.

93. Liito-oravan asuma-aluetta rajaavat kartan koordinaatiston koordinaattiakselit ja suora $y = -3x + 18$. Koordinaatiston yksikkö vastaa 50 metriä luonnossa. Kuinka suuri alueen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina hehtaarin tarkkuudella.

94. Laske sen kolmion pinta-ala, jonka suorat $y = \frac{1}{3}x + 1$ ja $y = x + 4$ rajaavat yhdessä x-akselin kanssa.

95. Tietokannan käytöstä peritään neljän euron minuuttihinta. Jos maksaa 2 500 euron vuosimaksun, tietokantaa saa käyttää 0,50 euron minuuttihinnalla. Piirrä kuvaajat tietokannan käyttökustannuksista kummankin vaihtoehdon mukaan, kun käyttöaika on alle 1 000 minuuttia vuodessa. Missä tapauksessa vuosimaksun maksaminen kannattaa?

96. **a)** Piirrä suorat $y = 1$, $y = -\frac{3}{2}x + 5$ ja $y = -\frac{2}{3}x$ ja määritä suorien rajaaman kolmion kärkipisteet.

b) Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

97. Suorat $y = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ ja $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ rajaavat kolmion. Määritä kolmion kärkipisteet ja laske kolmion pinta-ala.

6 Kahden pisteen määräämä suora

ESIMERKKI 1 Suora kulkee pisteiden $(-1, -3)$ ja $(4, 7)$ kautta. Muodosta suoran yhtälö.

RATKAISU

Määritetään suoran kulmakerroin. Pisteiden $(-1, -3)$ ja $(4, 7)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - (-3)}{4 - (-1)} = 2.$$

Pisteiden $(-1, -3)$ ja $(4, 7)$ y-koordinaattien 7 ja -3 erotuksen suhde x-koordinaattien 4 ja -1 erotukseen.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Sijoitetaan kulmakerroin $k = 2$ ja pisteen $(4, 7)$ koordinaatit $x_1 = 4$ ja $y_1 = 7$ (tai pisteen $(-1, -3)$ koordinaatit $x_1 = -1$ ja $y_1 = -3$).

$$y - 7 = 2(x - 4)$$

Ratkaistaan y.

$$y = 2x - 1$$

VASTAUS $y = 2x - 1$

ESIMERKKI 2 Vaa'an tarkistuksessa havaittiin, että 5,000 kg:n kuormalla vaaka näytti 4,82 kg ja 8,000 kg:n kuormalla 8,06 kg. Oletetaan, että kuorman ja näytön välinen riippuvuus on lineaarinen.

a) Muodosta lauseke, jonka avulla vaa'an näyttämästä lukemasta x voidaan laskea kuorma y.

b) Kuinka suuri kuorma on, kun vaaka näyttää 6,50 kg?

c) Kuinka vaa'alla voi punnita 10,00 kg:n mansikkaerän?

RATKAISU

a) Muodostetaan suoran yhtälö $y = kx + b$, missä x on vaa'an näyttö ja y kuorma.

Järjestetään tiedot taulukkoon.

vaa'an näyttö (kg) x	kuorma (kg) y	suoran piste (x, y)
4,82	5	(4,82; 5)
8,06	8	(8,06; 8)

Muodostetaan pisteiden $(4{,}82;\ 5)$ ja $(8{,}06;\ 8)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{8-5}{8{,}06-4{,}82}$$

Pisteiden $(4{,}82;\ 5)$ ja $(8{,}06;\ 8)$ y-koordinaattien 8 ja 5 erotuksen suhde x-koordinaattien 8,06 ja 4,82 erotukseen.

$$\approx 0{,}92593.$$

Kulmakertoimen likiarvo viiden numeron tarkkuudella.

Suoran yhtälö on

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Sijoitetaan kulmakerroin $k = 0{,}92593$ ja pisteen $(4{,}82;\ 5)$ koordinaatit $x_1 = 4{,}82$ ja $y_1 = 5$. Vaihtoehtoisesti voidaan sijoittaa pisteen $(8{,}06;\ 8)$ koordinaatit.

$$y - 5 = 0{,}92593(x - 4{,}82)$$

Ratkaistaan y.

$$y = 0{,}92593x + 0{,}53702.$$

Vakiotermin likiarvo on laskettu viiden numeron tarkkuudella.

Kun vaa'an näyttö on x kg, kuorman suuruus on $y = 0{,}92593x + 0{,}53702$.

b) Kun vaa'an näyttö on 6,50 kg, kuorman suuruus on

$$y = 0{,}92593 \cdot 6{,}5 + 0{,}53702 \approx 6{,}56 \text{ (kg)}.$$

c) Ratkaistaan yhtälön avulla, mitä vaaka näyttää, kun kuorman suuruus on 10,00 kg.

$$10 = 0{,}92593x + 0{,}53702$$

$$x \approx 10{,}22$$

Mansikkaerä painaa 10,00 kg, kun vaaka näyttää 10,22 kg.

VASTAUS **a)** $y = 0{,}92593x + 0{,}53702$ **b)** 6,56 kg **c)** Vaa'an tulee näyttää 10,22 kg.

HARJOITUKSIA

Sarja I

98. Suora kulkee pisteiden
a) $(1, 2)$ ja $(3, 8)$
b) $(-2, 8)$ ja $(3, -2)$
c) $(-4, 7)$ ja $(2, 3)$
kautta. Määritä suoran yhtälö.

99. Muodosta pisteiden
a) $(3, 5)$ ja $(10, 5)$
b) $(2, 1)$ ja $(2, 8)$
kautta kulkevan suoran yhtälö.

100. Suora kulkee pisteiden $(4, -10)$ ja $(7, 2)$ kautta. Missä pisteessä suora leikkaa
a) suoran $y = x + 1$
b) x-akselin?

101. Luontokerhojen välisessä aktiivisuuskilpailussa palkintoon vaadittu osanottajien määrä riippuu suoraviivaisesti kerhon jäsenmäärästä. Kun jäsenmäärä x on 50, vaadittu osanottajamäärä y on 40. Jäsenmäärän ollessa 100 vaaditaan 70 osanottajaa.
a) Laske riippuvuutta kuvaavan suoran kulmakerroin.
b) Muodosta suoran yhtälö.
c) Kuinka monta osanottajaa vaaditaan palkintoon, jos kerhon jäsenmäärä on 200?

102. Kun lukiosta lähetettiin 10 oppilasta myymään musikaalilippuja, he saivat kaupaksi 120 lippua. Toisella kerralla 30 oppilasta sai kaupaksi 200 lippua. Oletetaan, että myyjien lukumäärän ja myytyjen lippujen lukumäärän välistä riippuvuutta voidaan kuvata suoralla. Kuinka monta myyjää tulee lähettää matkaan, jos halutaan saada kaupaksi 400 lippua?

103. Virtasten kotitalouden vuoden sähkönkulutus oli 6 235 kWh ja sähkölasku 873,64 euroa. Samalta sähkönjakelijalta sähkönsä hankkivien naapureiden kulutus oli 3 502 kWh ja sähkölasku 529,83 euroa. Sähkölaskun suuruuden riippuvuus kulutuksesta on lineaarinen. Muodosta sähkölaskun suuruuden y ja kulutuksen x välistä riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö. Ilmaise yhtälön kulmakerroin ja vakiotermi neljän numeron tarkkuudella. Kuinka kulmakerroin ja vakiotermi voidaan tulkita?

104. Vuorokauden keskilämpötila Helsingissä on syyskuun 1. päivänä 14,0 °C ja lokakuun 1. päivänä 8,9 °C. Tiedot perustuvat säätilastoihin 30-vuotisjaksolta 1981–2010. Tutki lineaarisen mallin avulla, minä päivänä Helsingissä keskimäärin alkaa niin sanottu terminen syksy eli vuorokauden keskilämpötila alittaa 10 °C.

105. Sanna muisti, että celsiusasteikon nollapistettä vastaa fahrenheitasteikon lukema 32 ja celsiusasteikon veden kiehumispistettä fahrenheitasteikon lukema 212.
a) Muodosta Sannan muistitietojen perusteella yhtälö, jonka avulla voi muuttaa fahrenheitasteita celsiusasteiksi.
b) Ray Bradburyn kirja Fahrenheit 451 on saanut nimensä paperin syttymispisteen mukaan. Käännä teoksen nimi celsiusasteikolle.
c) Mitä fahrenheitasteikon lukemaa vastaa kireän pakkasen raja −25 °C?
d) Mikä on lämpötila, kun celsius- ja fahrenheitasteikkoiset lämpömittarit näyttävät samaa lukemaa?

106. Matin väliaika maratonjuoksun 35 km:n kohdalla oli 2.35.00 (2 tuntia, 35 minuuttia ja 00 sekuntia) ja 40 km:n kohdalla 2.56.00. Riston väliajat olivat 2.37.30 ja 2.56.30. Oletetaan, että molempien juoksu jatkuu maaliin saakka samalla vauhdilla kuin edelliset viisi kilometriä. Tällöin kuljetun matkan x ja käytetyn ajan y välinen riippuvuus on suoraviivaista.

a) Muodosta suorien yhtälöt. Muuta ajat ensin minuuteiksi.

b) Ennusta juoksijoiden loppuajat. Maratonjuoksun pituus on 42,195 km.

c) Missä kohdassa Risto ohittaa Matin?

Sarja II

107. Suora kulkee pisteiden

a) $(1, 3)$ ja $(3, 7)$

b) $(6, -2)$ ja $(-9, 3)$

c) $(5, -3)$ ja $(-1, -3)$

kautta. Muodosta suoran yhtälö.

108. Suora s kulkee pisteiden $(5, -3)$ ja $(-3, 21)$ kautta. Missä pisteessä suora s leikkaa suoran

a) $y = 2x - 8$ **b)** $y = -9$?

109. Jäätelökioskin hoitaja arvelee, että vuorokauden maksimilämpötilan x ja päivän kuluessa myytyjen jäätelöiden lukumäärän y välistä yhteyttä voidaan kuvata lineaarisella mallilla eli suoralla. Eräänä päivänä, jona korkein lämpötila oli 10 °C, hän myi 150 jäätelöä. Seuraavana päivänä, jona lämpötila oli 15 °C, kaupaksi meni 230 jäätelöä. Muodosta suoran yhtälö. Laske mallin avulla, kuinka monta jäätelöä menee kaupaksi päivänä, jona lämpötila saavuttaa hellerajan 25 °C.

110. Henkilöauton sisällä melutaso kasvaa lineaarisesti auton nopeuden mukana. Kun nopeus oli 50 km/h, melutasoksi mitattiin 62 dB (desibeliä). Toisessa mittauksessa nopeus oli 110 km/h ja melutaso 74 dB. Muodosta suoran yhtälö. Mikä on melutaso, kun ajetaan nopeudella 80 km/h?

111. Kauppias otaksuu, että hinnan vaikutusta myyntiin voidaan kuvata suoralla. Kun appelsiinikilo maksoi 1,50 euroa, päivämyynti oli 350 kilogrammaa. Kun hinta nostettiin 2,20 euroon, myynti putosi 70 kilogrammaan. Määritä yhtälö, joka kuvaa myynnin riippuvuutta hinnasta. Laske yhtälön avulla,

a) kuinka paljon appelsiineja menee kaupaksi, jos kilohinta on 1,70 euroa

b) kuinka suureksi kauppias voi korkeintaan asettaa appelsiinikilon hinnan, jos hän haluaa saada päivittäin kaupaksi koko tilaamansa 200 kilogramman appelsiinierän.

112. Suomalaisten tyttöjen keskipituus on nelivuotissyntymäpäivänä 103 cm ja 13-vuotissyntymäpäivänä 157 cm. Tällä välillä keskipituus kasvaa likimain lineaarisesti.

a) Muodosta yhtälö suoralle, joka kuvaa keskipituuden y riippuvuutta iästä x.

b) Mikä on 7 ja 10 vuotta täyttävien tyttöjen keskipituus?

c) Minkä ikäisten tyttöjen keskipituus on 150 cm?

d) Mikä olisi 17 ja 20 vuotta täyttävien tyttöjen keskipituus, jos kasvu jatkuisi lineaarisena?

e) Mikä olisi yhtälön mukainen tyttöjen keskimääräinen syntymäpituus?

113. Vuoden 2012 aikana ansaituista 23 900 euron tuloista maksettiin valtionveroa 515 euroa ja 39 100 euron tuloista 3 175 euroa. Näiden tulojen välillä valtionveron y riippuvuus tuloista x on lineaarinen.

a) Laske riippuvuutta kuvaavan suoran kulmakerroin.

b) Muodosta suoran yhtälö.

c) Juhan verotettavat tulot olivat 25 806,30 euroa. Laske valtionveron määrä.

d) Jaana maksoi vuoden 2012 tuloistaan valtionveroa 3 040,60 euroa. Kuinka suuret hänen tulonsa olivat?

114. Vuorokauden keskilämpötila kesäkuun 1. päivänä on Sydneyssä 14,7 °C ja Helsingissä 12,8 °C. Kesäkuun 21. päivän keskilämpötila Sydneyssä on 12,9 °C ja Helsingissä 15,3 °C. Jos oletetaan lämpötilojen tällä välillä muuttuvan ajan myötä lineaarisesti, niin minä päivänä kesäkuussa Helsingissä ja Sydneyssä on yhtä lämmintä?

Muutosprosentti ja muuttuneen arvon laskeminen

ONGELMA

Palkkaneuvottelujen tulos oli, että Maijan 20 euron ja Tiinan 16 euron tuntipalkkoja korotettiin niin, että palkat kerrottiin luvulla 1,05. Kuinka monta prosenttia Maijan palkka nousi, ja kuinka monta prosenttia Tiinan palkka nousi?

ESIMERKKI 1

Vuoden alussa Anteron palkka nousi 1 950 eurosta 2 090 euroon. Kesällä Antero joutui lyhennetylle työviikolle, ja palkka aleni 1 710 euroon. Kuinka monta prosenttia palkka muuttui

a) vuoden alussa **b)** kesällä?

RATKAISU

a) **Tapa 1.** Lasketaan ensin, kuinka paljon palkka muuttui.

$2\,090\ € - 1\,950\ € = 140\ €$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia palkan muutos on muutosta edeltävästä palkasta 1 950 euroa.

$\frac{140}{1\,950} \approx 0{,}072 = 7{,}2\ \%$ Nimittäjänä on muutosta edeltävä arvo.

Vuoden alussa palkka nousi 7,2 %.

Tapa 2. Lasketaan, kuinka monta prosenttia muuttunut palkka on muutosta edeltävästä palkasta.

$\frac{2\,090}{1\,950} \approx 1{,}072 = 107{,}2\ \%$ Nimittäjänä on muutosta edeltävä arvo. Koska palkka on noussut, tulos on yli 100 %.

Muutosta edeltävää arvoa vastaa 100 %.

Palkka nousi $107{,}2\ \% - 100\ \% = 7{,}2\ \%$.

b) **Tapa 1.** Lasketaan ensin, kuinka paljon palkka muuttui.

$2\,090\ € - 1\,710\ € = 380\ €$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia palkan muutos on muutosta edeltävästä palkasta 2 090 euroa.

$\frac{380}{2\,090} \approx 0{,}182 = 18{,}2\ \%$ Nimittäjänä on muutosta edeltävä arvo.

Kesällä palkka laski 18,2 %.

Tapa 2. Lasketaan, kuinka monta prosenttia muuttunut palkka on muutosta edeltävästä palkasta.

$\frac{1\,710}{2\,090} \approx 0{,}818 = 81{,}8\ \%$

Nimittäjänä on muutosta edeltävä palkka. Koska palkka on laskenut, tulos on alle 100 %.

Muutosta edeltävää arvoa vastaa 100 %.

Palkka laski $100\ \% - 81{,}8\ \% = 18{,}2\ \%$.

VASTAUS

a) Nousi 7,2 %. **b)** Laski 18,2 %.

Muutosprosentin laskeminen

Muutosprosentti voidaan laskea kahdella eri tavalla.

- Lasketaan, kuinka suuri muutos on, ja sitten, kuinka monta prosenttia muutoksen suuruus on muutosta edeltävästä arvosta.

tai

- Lasketaan, kuinka monta prosenttia muuttunut arvo on muutosta edeltävästä arvosta. Jos muuttunut arvo on suurempi kuin muutosta edeltävä, tulos on suurempi kuin 100 %. Jos muuttunut arvo on pienempi kuin muutosta edeltävä, tulos on pienempi kuin 100 %. Muutosprosentti on tuloksen poikkeama 100 %:sta.

ESIMERKKI 2

Bensiinin hintaa korotettiin 6,1 %. Ennen korotusta 95E-laatu maksoi 1,594 €/l ja 98E-bensiini 1,654 €/l. Laske korotetut hinnat.

RATKAISU

Tapa 1. Lasketaan suoraan korotetut hinnat. Korotettu hinta on $100\,\% + 6{,}1\,\% = 106{,}1\,\%$ alkuperäisestä hinnasta. Koska $106{,}1\,\% = 1{,}061$, hinnat tulivat 1,061-kertaisiksi.

95E: $1{,}061 \cdot 1{,}594 \approx 1{,}691$
98E: $1{,}061 \cdot 1{,}654 \approx 1{,}755$

Tapa 2. Lasketaan korotusten suuruudet ja lisätään ne alkuperäiseen hintaan.

95E:
Korotus: $0{,}061 \cdot 1{,}594 \approx 0{,}097$
Korotettu hinta: $1{,}594 + 0{,}097 = 1{,}691$

98E:
Korotus: $0{,}061 \cdot 1{,}654 \approx 0{,}101$
Korotettu hinta: $1{,}654 + 0{,}101 = 1{,}755$

VASTAUS

95E 1,691 €/l ja 98E 1,755 €/l

ESIMERKKI 3

Vuonna 2010 arvonlisäveron muutos alensi ravintola- ja ateriapalveluiden hintoja 7,3 %. Mikä aterian uusi hinta oli, jos entinen oli
a) 9,70 euroa **b)** 35,60 euroa?

RATKAISU

Alentunut hinta on $100\,\% - 7{,}3\,\% = 92{,}7\,\%$ entisestä hinnasta. Koska $92{,}7\,\% = 0{,}927$, aterioiden hinnat tulivat 0,927-kertaisiksi.

a) $0{,}927 \cdot 9{,}70 \approx 8{,}99$ (euroa)

b) $0{,}927 \cdot 35{,}60 \approx 33{,}00$ (euroa)

VASTAUS

a) 8,99 euroa **b)** 33,00 euroa

HARJOITUKSIA

Sarja I

115. Huoltamonpitäjä nosti bensiinin litrahinnan 1,593 eurosta 1,667 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta nousi?

116. Pörssiosakkeen arvo kohosi kuukaudessa 23,75 eurosta 26,09 euroon.
a) Kuinka monta prosenttia uusi kurssi on vanhasta?
b) Kuinka monta prosenttia kurssi nousi?

117. Yrityksen liikevaihto pieneni vuodessa 4,17 miljardista eurosta 3,98 miljardiin euroon. Kuinka monta prosenttia liikevaihto pieneni?

118. T-paidan hinta 18,79 euroa alennettiin 15,99 euroon.
a) Kuinka monta prosenttia alennettu hinta on alkuperäisestä hinnasta?
b) Kuinka monta prosenttia hinta aleni?

119. Millä luvulla hinta tulee kertoa, jos sitä
a) korotetaan 25 %
b) korotetaan 3,5 %
c) korotetaan 120 %
d) alennetaan 15 %
e) alennetaan 5,4 %
f) alennetaan 68 %?

120. Korota hintaa 15 %.
a) 260 euroa
b) 32,78 euroa
c) 312 500 euroa

121. Laske hintoja 7,5 %.
a) 320 euroa
b) 8,59 euroa
c) 1,24 miljoonaa euroa

122. Kuinka monta prosenttia hinta nousee tai alenee, kun se kerrotaan luvulla
a) 1,096 **b)** 1,5
c) 2 **d)** 0,94
e) 0,6 **f)** 0,992?

123. Vuokraa korotettiin peräkkäisinä vuosina 5 %, 10 % ja 8 %. Kuinka suureksi alun perin 500,00 euron suuruinen vuokra tuli?

124. Määräaikaistalletuksen todellinen korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,065 %.* Korko lisätään pääomaan vuosittain. Kuinka suureksi 17 000 euron talletus kasvaa
a) vuodessa
b) kahdessa vuodessa?

125. Tammikuun alussa tehdyn 4 000 euron osakesijoituksen arvo aleni tammikuussa 4,0 % ja helmikuussa 12,0 %, mutta kohosi maaliskuussa 17,5 %. Mikä sijoituksen arvo oli huhtikuun alussa?

126. Suodatin poistaa 85 % ilmassa olevista tiettyä kokoa suuremmista hiukkasista. Tällaisten hiukkasten määrä kuutiosenttimetrissä suodattamatonta ilmaa on 24 000. Kuinka paljon hiukkasia on ilmassa, joka on suodatettu
a) kerran **b)** kaksi kertaa?

---

* Pankkitilin korosta menee valtiolle lähdeverona 29 %, joten todellinen korko on aina sovittua korkoa (tässä tapauksessa 1,50 %) pienempi.

Sarja II

127. Vuonna 1990 Suomessa syntyi 65 549 lasta ja vuonna 2012 59 493 lasta.

a) Kuinka monta prosenttia syntyneiden lasten määrä vuonna 2012 oli syntyneiden määrästä vuonna 1990?

b) Kuinka monta prosenttia syntyneiden lasten määrä on vähentynyt?

128. Vuodesta 2000 vuoteen 2011 vankien päivittäinen keskimäärä Suomen vankiloissa kasvoi 2 855:stä 3 214:aan. Kuinka monta prosenttia vankien määrä kasvoi?

129. Vuonna 2012 10–20-vuotiaat suomalaiset katsoivat televisiota keskimäärin yhden tunnin ja 24 minuuttia päivässä. Kuusi vuotta aikaisemmin vuonna 2006 keskimääräinen katseluaika oli 15 minuuttia pitempi. Kuinka monta prosenttia katseluaika oli kuudessa vuodessa lyhentynyt?

130. Taulukossa on muutamien ruoka-aineiden kulutus asukasta kohti Suomessa vuosina 1939 ja 2011. Laske, kuinka monta prosenttia kunkin ravintoaineen kulutus tänä aikana on lisääntynyt tai vähentynyt.

	1939	2011
nestemäiset maitovalmisteet, l	292	182
ruis, kg	69,2	16,0
voi, kg	11,0	4,0
kahvi, kg	7,3	9,7
alkoholijuomat, 100 %, l	1,4	10,1

131. Korota palkkaa 3 %.

a) 926 euroa

b) 1 730 euroa

c) 4 640 euroa

132. Alennusmyynnissä hintoja laskettiin 35 %. Laske alennetut hinnat viiden sentin tarkkuudella.

a) 32 euroa

b) 198 euroa

c) 1 499 euroa

133. Kuinka monta prosenttia luku suurenee tai pienenee, kun se kerrotaan luvulla

a) 1,95 **b)** 1,015

c) 0,95 **d)** 0,095

e) 0,05?

134. Simo sijoitti 8 000 euroa pankin sijoitusrahastoon. Ensimmäisenä vuotena sijoituksen arvo nousi 12,3 % ja toisena vuotena 18,1 %, mutta kolmantena vuotena sijoituksen arvo putosi 31,2 %. Mikä sijoituksen arvo oli kolmen vuoden kuluttua?

135. Kunnallisessa lukiossa opettajina työskentelevien Villen, Kaisan ja Annelin peruspalkka on 2 744,78 euroa kuukaudessa. Heille maksetaan myös ns. ikälisiä. Viiden palvelusvuoden jälkeen kuukausipalkkaa korotetaan ensimmäisellä ikälisällä, joka on 6 % peruspalkasta. Kahdeksan palvelusvuoden jälkeen saa toisen ikälisän, joka on 5 % peruspalkan ja edellisen ikälisän yhteismäärästä. Seuraavat ikälisät maksetaan 10, 15 ja 20 palvelusvuoden jälkeen, ja ne ovat suuruudeltaan 10 %, 4 % ja 6 % edeltävästä palkasta. Villellä on palvelusaikaa 6 vuotta, Kaisalla 14 ja Annelilla 26 vuotta. Kuinka suuret Villen, Kaisan ja Annelin kuukausipalkat ovat?

Prosenttilausekkeita

ESIMERKKI 1

Tehtaan tuotanto on tänä vuonna a yksikköä. Ilmaise lausekkeena ensi vuoden tuotanto, jos tuotanto

a) kaksinkertaistuu

b) kasvaa 1,2-kertaiseksi

c) kasvaa 30 %

d) vähenee 12 %.

RATKAISU

a) Kaksinkertainen tuotanto on $2a$.

b) 1,2-kertainen tuotanto on $1{,}2a$.

c) Ensi vuoden tuotanto on $100\,\% + 30\,\% = 130\,\%$ tämän vuoden tuotannosta. Koska $130\,\% = 1{,}3$, tuotanto kasvaa 1,3-kertaiseksi. Ensi vuoden tuotanto on $1{,}3a$.

d) Ensi vuoden tuotanto on $100\,\% - 12\,\% = 88\,\%$ tämän vuoden tuotannosta. Koska $88\,\% = 0{,}88$, tuotanto pienenee 0,88-kertaiseksi. Ensi vuoden tuotanto on $0{,}88a$.

VASTAUS

a) $2a$ **b)** $1{,}2a$ **c)** $1{,}3a$ **d)** $0{,}88a$

ESIMERKKI 2

Tuotteen alkuperäinen hinta on h. Kuinka monta prosenttia hintaa on alennettu tai korotettu, kun uusi hinta on

a) $1{,}32h$ **b)** $1{,}2h$ **c)** $0{,}83h$ **d)** $3h$?

RATKAISU

a) Uusi hinta on 1,32-kertainen alkuperäiseen hintaan h verrattuna eli 132 % hinnasta h. Korotus on $132\,\% - 100\,\% = 32\,\%$.

b) $1{,}2h$ on 120 % hinnasta h. Korotus on $120\,\% - 100\,\% = 20\,\%$.

c) $0{,}83h$ on 0,83-kertainen alkuperäiseen hintaan h verrattuna eli 83 % hinnasta h. Alennus on $100\,\% - 83\,\% = 17\,\%$.

d) $3h$ on 300 % hinnasta h. Korotus on $300\,\% - 100\,\% = 200\,\%$.

VASTAUS

a) Korotettu 32 %. **b)** Korotettu 20 %.
c) Alennettu 17 %. **d)** Korotettu 200 %.

ESIMERKKI 3

Keväällä polkupyörän hintaa korotetaan 30 % ja syksyllä alennetaan 28 %. Kuinka monta prosenttia syksyn hinta on alkuperäistä hintaa korkeampi tai alhaisempi?

RATKAISU

Hintaa ei tiedetä, joten sitä on merkittävä kirjaimella. Olkoon polkupyörän alkuperäinen hinta h.

Hintaa h korotetaan 30 %. Koska $100\,\% + 30\,\% = 130\,\% = 1{,}3$, hinta korotuksen jälkeen on

$1{,}3h$.

Kun hintaa korotetaan 30 %, hinta tulee 1,3-kertaiseksi.

Hintaa $1{,}3h$ alennetaan 28 %. Koska $100\,\% - 28\,\% = 72\,\% = 0{,}72$, hinta alennuksen jälkeen on

$0{,}72 \cdot 1{,}3h = 0{,}936h$.

Kun hintaa alennetaan 28 %, hinta tulee 0,72-kertaiseksi.

Syksyn hinta $0{,}936h$ on 93,6 % alkuperäisestä hinnasta h.

Hinta aleni $100\,\% - 93{,}6\,\% = 6{,}4\,\%$.

VASTAUS

6,4 % alhaisempi

ESIMERKKI 4

Kuluttajatutkimuksen mukaan ruokakori oli halvin kaupassa A. Kaupassa B ruokakori maksoi 4,7 % enemmän ja kaupassa C 12,1 % enemmän kuin kaupassa A. Kuinka monta prosenttia ruokakorin hinta kaupassa C oli suurempi kuin kaupassa B?

RATKAISU

Olkoon a ruokakorin hinta kaupassa A.

Ruokakorin hinta kaupassa B oli

$1{,}047a$ $\qquad 100\,\% + 4{,}7\,\% = 104{,}7\,\% = 1{,}047$

ja kaupassa C

$1{,}121a.$ $\qquad 100\,\% + 12{,}1\,\% = 112{,}1\,\% = 1{,}121$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia hinta $1{,}121a$ on hintaa $1{,}047a$ suurempi.

$$\frac{1{,}121a}{1{,}047a} = \frac{1{,}121}{1{,}047} \qquad a \text{ supistuu pois.}$$

$$\approx 1{,}071 = 107{,}1\,\%$$

Koska $107{,}1\,\% - 100\,\% = 7{,}1\,\%$, kaupan C hinta on 7,1 % kaupan B hintaa suurempi.

VASTAUS

7,1 %

HARJOITUKSIA

Sarja I

136. Kirjoita lauseke.
a) puolet palkasta p
b) 25 % luvusta x
c) 90 % väkiluvusta a

137. Kirjoita lausekkeena uusi hinta, kun vanhaa hintaa a korotetaan
a) 30 % **b)** 5 %
c) 1,2 % **d)** 100 %.

138. Kirjoita lausekkeena uusi hinta, kun vanhaa hintaa a alennetaan
a) 30 % **b)** 5 %
c) 1,2 % **d)** 78 %.

139. Ratkaise vanha hinta, kun
a) 12 %:n korotuksen jälkeen uudeksi hinnaksi tuli 140 euroa
b) 36 %:n alennuksen jälkeen uudeksi hinnaksi tuli 160 euroa.
(Ohje: Merkitse alkuperäistä hintaa x ja kirjoita ja ratkaise yhtälö.)

140. Kuinka monta prosenttia lukumäärä on kasvanut tai vähentynyt, kun vanha lukumäärä on n ja uusi lukumäärä
a) $1{,}04n$ **b)** $1{,}4n$
c) $0{,}94n$ **d)** $0{,}4n$
e) $0{,}04n$?

141. Vuoden aikana hintaa korotettiin tammikuussa 12 % ja kesäkuussa 15 %. Kuinka monta prosenttia hinta vuoden aikana nousi?

142. Kuinka monta prosenttia hinta kaikkiaan nousee tai alenee, kun hintaa
a) alennetaan ensin 20 % ja korotetaan sitten 30 %
b) korotetaan ensin 30 % ja alennetaan sitten 20 %
c) korotetaan ensin 30 % ja alennetaan sitten 30 %?

143. Rautakauppa myöntää viiden prosentin käteisalennuksen. Lisäksi kanta-asiakkaat saavat 20 %:n alennuksen. Myyjä laskee ensin kanta-asiakasalennuksen ja sitten käteisalennuksen, asiakkaan mielestä tulisi menetellä päinvastoin. Kuinka monen prosentin alennuksen asiakas kummallakin tavalla saa? Kumpi tapa on asiakkaalle edullisempi?

144. Rautakauppa antaa suurasiakkaille 40 %:n alennuksen. Eräs asiakas saa lisäksi 30 %:n alennuksen suurasiakashintaan. Kuinka suuren alennuksen asiakas saa?

145. Elinkustannukset nousivat viitenä peräkkäisenä vuonna 7,2 %, 6,8 %, 5,2 %, 6,5 % ja 6,0 %. Kuinka monta prosenttia elinkustannukset nousivat viiden vuoden aikana?

146. Teollisuuslaitoksen henkilökunta väheni kolmena peräkkäisenä vuotena 3,0 %, 5,2 % ja 6,1 %. Kuinka monta prosenttia henkilökunta väheni koko ajanjaksona?

147. Kuinka monta prosenttia
a) hinta $0{,}87b$ on hinnasta $1{,}12b$
b) hinta b on hintaa $0{,}82b$ suurempi
c) hinta b on hintaa $1{,}35b$ pienempi?

148. Yrityksen liikevaihto toisena toimintavuotena oli 18,5 % suurempi ja kolmantena toimintavuotena 42,5 % suurempi kuin ensimmäisenä toimintavuotena. Kuinka monta prosenttia kolmannen toimintavuoden liikevaihto oli toisen toimintavuoden liikevaihtoa suurempi?

149. Vuonna 2012 parturi- ja kampaamopalvelujen arvonlisäveroprosentti nousi 8:sta 23:een. Kuinka monta prosenttia palvelujen hinta nousi, jos yrittäjä piti verottoman hinnan ennallaan? Arvonlisävero lasketaan verottomasta hinnasta. Jos esimerkiksi tuotteen hinta ilman arvolisäveroa on 100 euroa, niin 8 %:n arvonlisäveron kera hinta on 108 euroa.

Sarja II

150. Kirjoita lausekkeena uusi hinta, kun hintaa p
a) korotetaan 23 %
b) alennetaan 6,3 %.

151. Kuinka suuri vuokra oli ennen, kun
a) 5 %:n korotuksen jälkeen vuokra oli 861 euroa
b) 8 %:n alennuksen jälkeen vuokra oli 1 334 euroa?

152. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan palkka w on muuttunut, kun uusi palkka on
a) $0{,}87w$ **b)** $1{,}028w$ **c)** $1{,}1w$?

153. Pankkitilin korosta pankki tilittää valtiolle 29 %:n suuruisen niin sanotun lähdeveron. Mikä on määräaikaistalletuksen todellinen korkoprosentti, jos koroksi on neuvoteltu
a) 2,00 % **b)** 2,35 %?

154. Kuinka monta prosenttia hinta kaikkiaan nousee tai alenee, jos hintaa
a) ensin korotetaan 30 % ja sitten alennetaan 25 %
b) ensin alennetaan 25 % ja sitten korotetaan 20 %?

155. Vaatekauppa alensi paitojen hintoja 10 %, kenkien 20 % ja housujen 50 %. Alennusmyynnin lopussa annettiin alennetuista hinnoista vielä 50 %:n alennus. Kuinka monen prosentin alennuksella alkuperäisestä hinnasta saa
a) paidan **b)** kengät **c)** housut?

156. Alennusmyynnissä jo 30 %:lla alennettuja hintoja alennetaan lopuksi vielä 40 %. Mikä on ollut alennusmyynnistä 105 eurolla ostetun takin alkuperäinen hinta?

157. Kunnallisen lukion rehtorin palkkaa korotetaan aina määrättyjen palveluvuosien jälkeen ns. ikälisillä. Ikälisät ovat järjestyksessä 2 %, 5 %, 5 %, 5 % ja 10 % edeltävästä palkasta. Kuinka monta prosenttia alkupalkkaa suurempi palkka viiden ikälisän jälkeen on?

158. Yritykset A ja B markkinoivat tuotetta samalla hinnalla. Yritys A alensi hintaa 30 % ja yritys B 20 %. Kuinka monta prosenttia A:n hinta oli nyt B:n hintaa pienempi?

159. Julkisen liikenteen matkalippujen arvonlisävero on 10 % verottomasta hinnasta, elintarvikkeiden 14 % ja elektroniikkalaitteiden 24 %. Kuinka monta prosenttia

a) junalipun

b) leivän

c) matkapuhelimen

hinnasta on arvonlisäveroa?

160. Kolmivuotiseksi palkkasopimukseksi on tarjolla kaksi vaihtoehtoa.

A: Palkka nousee kerralla 21 %.

B: Palkkaa korotetaan kunkin vuoden alussa 7 %.

a) Kumman vaihtoehdon mukaan palkka sopimuskauden lopussa on suurempi? Kuinka monta prosenttia suurempi?

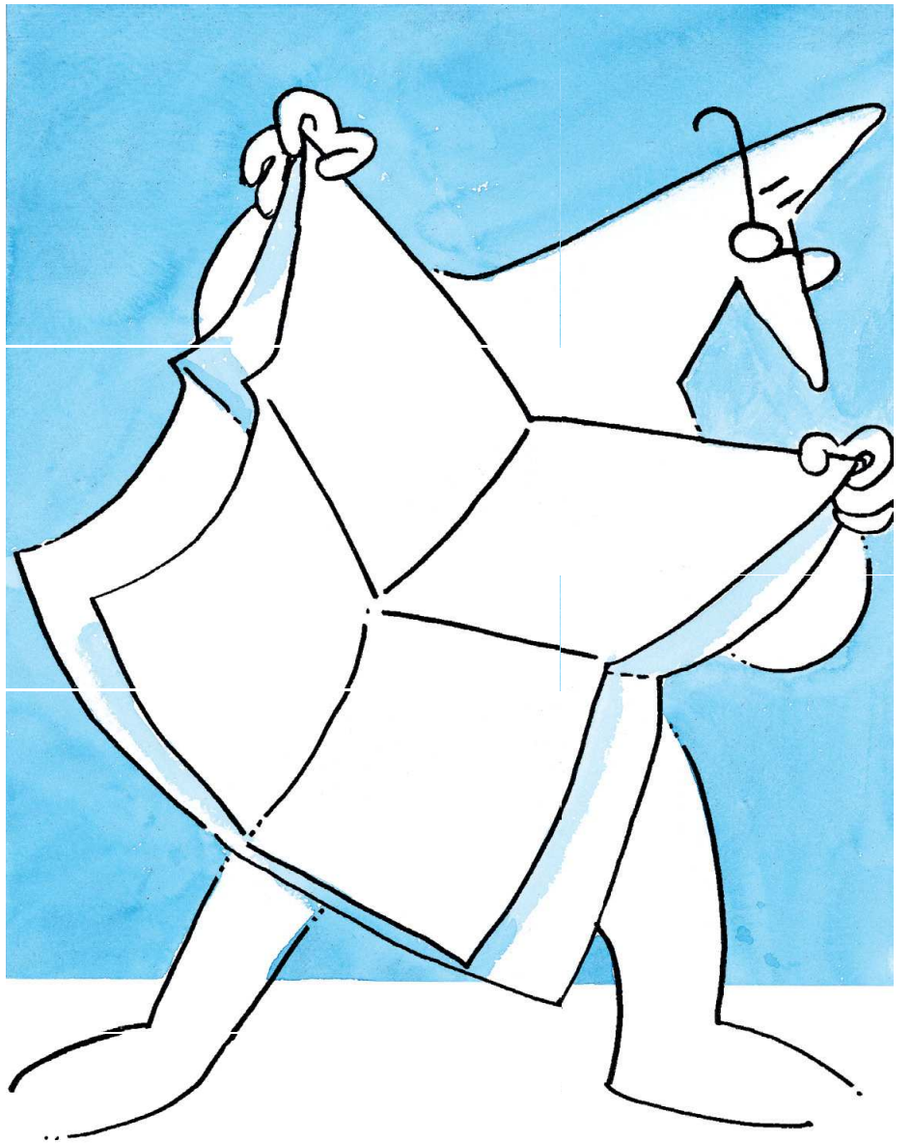
b) Kumman vaihtoehdon mukaan saa enemmän palkkaa kolmen vuoden aikana? Kuinka monta prosenttia enemmän?

9 Potenssi

ONGELMA

Paperiarkki taitetaan keskeltä kaksin kerroin, jolloin päällekkäin on kaksi paperia. Taitettu arkki taitetaan jälleen kaksin kerroin, jolloin päällekkäin on neljä paperia jne. Kuinka monta paperia on päällekkäin, kun taitteluja on tehty

a) kolme **b)** neljä **c)** viisi
d) kymmenen **e)** viisitoista?

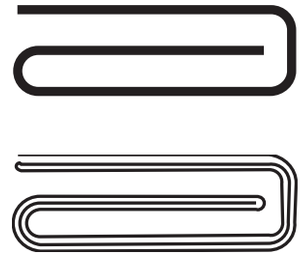


ESIMERKKI 1

Lehtevää voitaikinaa valmistettaessa taikina kaulitaan levyksi, taitetaan kolmin kerroin, kaulitaan levyksi, taitetaan jälleen kolmin kerroin jne. Tällä tavalla taikinaan muodostuu ohuita kerroksia. Eero kauli ja taittoi kymmenen kertaa. Taulukoi kerrosten lukumäärä taittelun edistyessä.

RATKAISU

Ensimmäisen taittelun jälkeen kerroksia on kolme. Toisen taittelun jälkeen kerroksia on kolme kertaa kolme eli yhdeksän. Jokainen taittelu kolminkertaistaa kerrosten lukumäärän. Kerrosten lukumäärät ovat luvun 3 potensseja.



taitteluja	kerroksia
0	1
1	$3 = 3$
2	$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
3	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$
4	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$
5	$3^5 = 243$
6	$3^6 = 729$
7	$3^7 = 2\,187$
8	$3^8 = 6\,561$
9	$3^9 = 19\,683$
10	$3^{10} = 59\,049$

Potenssi

Olkoon n positiivinen kokonaisluku eli $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Luvun a n:s potenssi a^n on tulo:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kappaletta}}.$$

Erityisesti on

$a^1 = a$.

Potenssilausekkeessa a^n luku a on *kantaluku* ja luku n on *eksponentti*.*

* Sana potenssi tulee latinan sanasta *potens*, kykenevä, mahtava. Sana eksponentti tulee latinan sanasta *exponere*, osoittaa.

ESIMERKKI 2

Muodosta ja sievennä lauseke.

a) Luvun b kolmannen ja neljännen potenssin tulo.

b) Luvun x viidennen ja toisen potenssin osamäärä.

c) Luvun x neljännen potenssin kolmas potenssi.

d) Tulon $7ab$ kuutio.

e) Osamäärän $\frac{b}{4}$ neliö.

RATKAISU

a) Luvun b kolmannen ja neljännen potenssin tulo merkitään $b^3 \cdot b^4$.

Lauseke voidaan sieventää symbolisella laskimella.

$b^3 \cdot b^4 = b^7$

Voidaan myös purkaa potenssit tuloiksi ja käyttää lukujen kertolaskun ominaisuuksia.

$b^3 \cdot b^4 = bbb \cdot bbbb = bbbbbbb = b^7$

Eksponentiksi tuli eksponenttien 3 ja 4 summa: $3 + 4 = 7$.

b) Luvun x viidennen ja toisen potenssin osamäärä merkitään $\frac{x^5}{x^2}$.

Lauseke voidaan sieventää symbolisella laskimella.

$\frac{x^5}{x^2} = x^3$

Voidaan myös purkaa potenssit tuloiksi.

$\frac{x^5}{x^2} = \frac{\overset{1}{x}\overset{1}{x}xxx}{\underset{1}{x}\underset{1}{x}}$

Supistuu.

$= xxx = x^3$

Eksponentiksi tuli eksponenttien 5 ja 2 erotus: $5 - 2 = 3$.

c) Luvun x neljännen potenssin x^4 kolmas potenssi merkitään

$(x^4)^3$.

Potenssin kantalukuna oleva lauseke on merkittävä sulkeisiin.

Lauseke voidaan sieventää symbolisella laskimella.

$(x^4)^3 = x^{12}$

Voidaan myös purkaa potenssi tuloiksi.

$(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$ Lausekkeessa on kantalukuna x^4.

$= xxxx \cdot xxxx \cdot xxxx$

$= x^{12}$ Eksponentiksi tuli eksponenttien 3 ja 4 tulo: $3 \cdot 4 = 12$.

d) Luvun kuutio on luvun kolmas potenssi. Tulon $7ab$ kolmas potenssi merkitään

$(7ab)^3$. Potenssin kantalukuna oleva lauseke on merkittävä sulkeisiin.

Lauseke voidaan sieventää symbolisella laskimella. Kun laskimeen näppäillään kirjainten tulo, on aina käytettävä kertomerkkiä.

$(7ab)^3 = (7 \cdot a \cdot b)^3 = 343a^3b^3$

Voidaan myös purkaa potenssi tuloksi.

$(7ab)^3 = 7ab \cdot 7ab \cdot 7ab$ Lausekkeessa on kantalukuna $7ab$.

$= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot aaa \cdot bbb = 7^3\, a^3 \cdot b^3 = 343a^3b^3$

e) Luvun neliö on luvun toinen potenssi. Osamäärän $\frac{b}{4}$ neliö merkitään

$\left(\frac{b}{4}\right)^2$. Kantalukuna oleva lauseke on merkittävä sulkeisiin.

Lauseke voidaan sieventää symbolisella laskimella.

$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{b^2}{16}$

Voidaan myös purkaa potenssi tuloksi.

$\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4}$ Osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$= \frac{b \cdot b}{4 \cdot 4} = \frac{b^2}{16}$

VASTAUS **a)** b^7 **b)** x^3 **c)** x^{12} **d)** $343a^3b^3$ **e)** $\frac{b^2}{16}$

Potenssilausekkeiden sieventäminen

Potenssilausekkeet voidaan sieventää symbolisella laskimella. Jos lausekkeessa on kirjainten tulo, tulo on näppäiltävä laskimeen käyttämällä kertomerkkiä.

Potenssilausekkeita voidaan sieventää myös niin, että potenssit puretaan ensin tuloiksi potenssin määritelmän mukaisesti ja sitten käytetään lukujen kertolaskun ominaisuuksia.

Voidaan myös käyttää seuraavia niin sanottuja *potenssikaavoja*.

Saman kantaluvun potenssien tulo ja osamäärä

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Saman kantaluvun potenssien tulo on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien summa.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Saman kantaluvun potenssien osamäärä on yhtä suuri kuin saman kantaluvun potenssi, jonka eksponentti on eksponenttien erotus.

Potenssin potenssi

$(a^m)^n = a^{mn}$

Kun potenssi korotetaan potenssiin, niin eksponentiksi tulee eksponenttien tulo.

Tulon potenssi ja osamäärän potenssi

$(ab)^n = a^n b^n$

Tulon potenssi on tekijöiden potenssien tulo.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä.

JOHDANTO-ESIMERKKI 3

Yksivuotinen satukukka tuottaa 111 siementä, joista jokainen tuottaa seuraavana kesänä uuden kukan. Hilkka kylvi keväällä puutarhaansa yhden satukukan siemenen. Kuinka monta satukukkaa on kesällä kymmenen vuoden kuluttua?

RATKAISU

Samana kesänä on yksi kukka, yhden vuoden kuluttua 111, kahden vuoden kuluttua $111 \cdot 111 = 111^2$, kolmen vuoden kuluttua $111 \cdot 111 \cdot 111 = 111^3$ jne. Kymmenen vuoden kuluttua kukkien lukumäärä on 111^{10}.

Kun potenssin 111^{10} arvo lasketaan symbolisella laskimella, saadaan

$111^{10} = 283942098606901565601$.

Luku on työläs lausua ja kopioida. Riittävä käsitys kukkien määrästä saadaan lukumäärän likiarvosta.

Kun symbolisella laskimella lasketaan edelleen potenssin 111^{10} likiarvo tai kun potenssin arvo lasketaan tavallisella laskimella, näyttöön ilmestyy laskimesta riippuen jotain seuraavankaltaista.

2.839420986E20

tai

2.839420986 20

Näyttö ilmaisee luvun likiarvon niin sanotussa kymmenpotenssimuodossa. Näyttö tulkitaan (kolmen numeron tarkkuuteen pyöristettynä):

$111^{10} \approx 2{,}84 \cdot 10^{20}$.

Koska $10^1 = 10$, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ ja niin edelleen, luvun 10 potenssit saadaan kirjoittamalla ykkösen perään eksponentin osoittama määrä nollia.

$111^{10} \approx 2{,}84 \cdot 10^{20} = 2{,}84 \cdot 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

$= 284\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

miljoona 10^6

biljoona 10^{12}

triljoona 10^{18}

Kukkia on siis noin 284 triljoonaa.

VASTAUS

$2{,}84 \cdot 10^{20}$ eli 284 triljoonaa kukkaa

ESIMERKKI 4

Edellisen esimerkin satukukkien lukumäärä on kymmenen vuoden kuluttua noin $2{,}84 \cdot 10^{20}$ eli 284 triljoonaa. Maapallon pinta-ala merineen on noin 510 biljoonaa neliömetriä. Kuinka monta kukkaa on neliömetriä kohden?

RATKAISU

Lukusana biljoona tarkoittaa luvun 10 potenssia $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$. Maapallon pinta-ala on siis $510 \cdot 10^{12}$ neliömetriä.

Kukkien lukumäärä neliömetriä kohden on noin

$$\frac{2{,}84 \cdot 10^{20}}{510 \cdot 10^{12}} \approx 560\,000.$$

VASTAUS

noin 560 000 kukkaa

ESIMERKKI 5

Kuinka monta numeroa on kokonaisluvussa 199^{30}?

RATKAISU

Kun potenssin arvo lasketaan symbolisella laskimella, saadaan pitkä kokonaisluku:

$199^{30} = 9238\ldots4001.$

Symbolinen laskin ilmoittaa laskujen kokonaislukutulokset tarkasti, jos luvun numeroiden määrä on enintään 993. Numeroiden lukumäärän laskeminen laskimen näytöstä on kuitenkin hankalaa.

Kun edelleen lasketaan luvun likiarvo tai kun potenssin arvo lasketaan tavallisella laskimella, saadaan (kahden numeron tarkkuudella)

$199^{30} \approx 9{,}2 \cdot 10^{68}$.

Luvussa 10^{68} on alussa ykkönen ja sen jälkeen 68 nollaa eli 69 numeroa. Luvussa $9{,}2 \cdot 10^{68}$ on yhtä monta numeroa kuin luvussa 10^{68}. Siis kokonaisluvussa 199^{30} on 69 numeroa.

VASTAUS

69 numeroa

Kymmenpotenssimuoto

Luvun *kymmenpotenssimuoto* tarkoittaa luvun esittämistä muodossa $k \cdot 10^n$.

Esimerkiksi $123\,400\,000\,000 = 1{,}234 \cdot 100\,000\,000\,000$
$= 1{,}234 \cdot 10^{11}$.

Luvussa 10^n on ykkösen jälkeen n nollaa.

Symboliset laskimet esittävät kymmenpotenssimuodossa suurten lukujen likiarvot. Tavalliset laskimet esittävät kymmenpotenssimuodossa luvut, jotka ovat liian pitkiä mahtuakseen kokonaan laskimen näyttöön.

Suuret luvut

Tavallisimmat suuria lukuja tarkoittavat lukusanat ovat:*

miljoona	10^6
miljardi	10^9
biljoona	10^{12}
triljoona	10^{18}

ESIMERKKI 6

Kirjoita kymmenpotenssimuodossa kahden numeron tarkkuudella valonnopeus 299 792 458 m/s.

RATKAISU

$299\,792\,458$

$= 2{,}997\,924\,58 \cdot 100\,000\,000$ — Pilkku siirrettiin ensimmäisen numeron perään. Luvun 10 potenssi on yhtä pitkä kuin alkuperäinen luku.

$\approx 3{,}0 \cdot 10^8$ (m/s) — Kerroin pyöristettiin toiseen numeroon.

VASTAUS

$3{,}0 \cdot 10^8$ m/s

---

* Nimetyt suuret lukusanat miljardia lukuun ottamatta ovat miljoonan potensseja, joissa etuliite bi-, tri- jne. ilmaisee eksponentin. Siis biljoona on $(10^6)^2 = 10^{12}$ ja triljoona $(10^6)^3 = 10^{18}$. Edelleen $(10^6)^4 = 10^{24}$ on *kvadriljoona*, $(10^6)^5 = 10^{30}$ on *kvintiljoona* ja niin edelleen. Englanninkielisissä maissa on käytössä erilainen suurten lukujen asteikko, jossa esimerkiksi sana *billion* tarkoittaa miljardia (10^9) ja sana *trillion* biljoonaa (10^{12}). Erilaisista asteikoista aiheutuu joskus sekaannusta.

HARJOITUKSIA

Sarja I

161. Yksivuotinen kukka tuottaa seitsemän siementä, ja jokainen siemen itää ja kukkii seuraavana vuonna. Kuinka monta kukkaa on

a) kolmen **b)** kuuden

vuoden kuluttua ensimmäisen kukan kukkimisesta?

162. Sievennä.

a) $a^2 \cdot a^4$ **b)** $\dfrac{x^4}{x}$

c) $(x^2)^4$ **d)** $(6ab^3)^2$

e) $\left(\dfrac{a}{5}\right)^2$

163. Muodosta ja sievennä.

a) Luvun b kuution ja viidennen potenssin tulo.

b) Luvun x kymmenennen potenssin ja neliön osamäärä.

c) Tulon ab^3 neljäs potenssi.

d) Osamäärän $\dfrac{3x}{4}$ neliö.

164. Ilmaise kantaluvun 5 potenssina.

a) $5^7 \cdot 5^3 \cdot 5^4$ **b)** $5 \cdot 5^{12}$ **c)** $(5^5)^3$

165. Tulkitse laskimen näyttö kahden numeron tarkkuudella ja lausu luku käyttämällä suurten lukujen lukusanoja.

a) 6.5467751E10

b) 9.2719217 14

166. Lausu luku käyttämällä suurten lukujen lukusanoja ja esitä luku kymmenpotenssimuodossa.

a) 7 350 000 000

b) 92 000 000 000 000 000

167. Ihmisaivojen kehitys lähtee yhdestä solusta. Tämä jakautuu kahdeksi soluksi, nämä kumpikin kahdeksi soluksi jne. Arvioidaan, että jakautuminen toistuu 50 kertaa. Kuinka monta aivosolua näin muodostuu? Anna vastaus kahden numeron tarkkuudella.

168. Niin sanottu *tähtitieteellinen yksikkö* (au) on alkuperäisen määritelmänsä mukaan Maan keskietäisyys Auringosta. Nykyisen määritelmän mukaan 1 au = 149 597 870 700 m. Ilmaise tähtitieteellisen yksikön suuruus kymmenpotenssimuodossa metreinä ja kilometreinä pyöristettynä kolmen numeron tarkkuuteen.

169. Määritä kokonaislukujen 3^{206} ja 5^{137} likiarvot kahden numeron tarkkuudella. Kumpi luvuista on suurempi? Kuinka monta numeroa kokonaisluvuissa 3^{206} ja 5^{137} on?

170. Maapallon maapinta-ala on 150 biljoonaa neliömetriä ja väkiluku noin 7,1 miljardia (vuosi 2013). Kuinka monta neliömetriä maata on jokaiselle maapallon asukkaalle?

171. Maapallon todennettujen maakaasuvarojen suuruuden arvioitiin vuonna 2011 olevan $2{,}8 \cdot 10^{14}$ kuutiometriä. Saman vuoden tuotanto oli $3{,}39 \cdot 10^{12}$ kuutiometriä. Kuinka moneksi vuodeksi maakaasua näiden lukujen perusteella riittää?

172. Maata lähimmät tähdet ovat Aurinko ja Proxima Centauri. Maan keskietäisyys Auringosta on 149,6 miljoonaa kilometriä. Proxima Centauri on 4,2 valovuoden etäisyydellä Maasta. Ilmoita Proxima Centaurin etäisyys Maasta kilometreinä. Kuinka moninkertainen matka Maasta Proxima Centauriin on verrattuna matkaan Maasta Aurinkoon? Valovuosi on matka, jonka valo kulkee yhdessä vuodessa. Valonnopeus on $3{,}00 \cdot 10^8$ m/s ja tähtitieteellisen vuoden pituus 365,25 vuorokautta.

173. Shakkipelin keksijän kerrotaan pyytäneen palkkioksi yhden vehnänjyvän shakkilaudan ensimmäiselle ruudulle, kaksi jyvää toiselle, neljä jyvää kolmannelle, kahdeksan jyvää neljännelle ruudulle jne.

a) Kuinka monta jyvää on laudan viimeisellä ruudulla?

b) Mikä on shakkilaudan viimeisellä ruudulla olevan vehnämäärän massa? Anna vastaus tonneina. Yhden vehnänjyvän massa on noin 0,031 g.

c) Koko maailman vehnäntuotanto on noin 690 miljoonaa tonnia vuodessa. Kuinka monen vuoden tuotanto on shakkilaudan viimeisellä ruudulla?

174. Aino saa ketjukirjeen, jossa kehotetaan lähettämään kopio kirjeestä viidelle ihmiselle. Oletetaan, että Aino ja kaikki häntä seuraavat kirjeen saajat noudattavat kehotusta. Aino lähettää siis viisi kirjettä – kirjeiden ensimmäinen sukupolvi. Kuinka monta kirjettä on kirjeiden

a) toisessa

b) kolmannessa

c) kymmenennessä

d) 20. sukupolvessa?

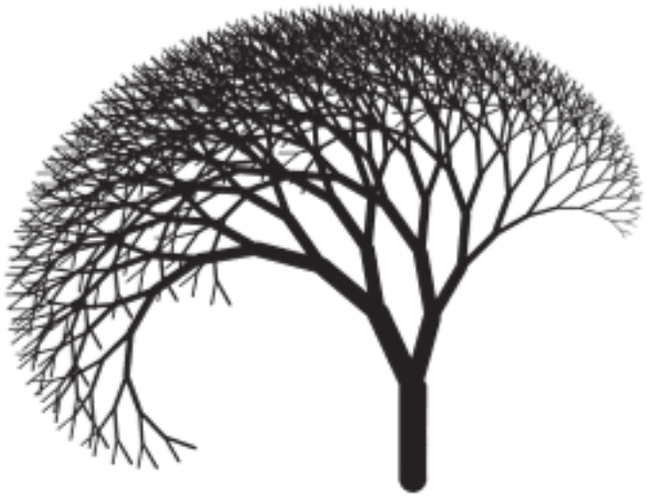
e) Maapallon väkiluku on noin 7,1 miljardia (vuosi 2013). Kuinka monta kirjettä jokaista maapallon asukasta kohden on kirjeiden 20. sukupolvessa?

Sarja II

175. Binääripuun kasvu alkaa rungosta, joka vuoden kuluttua haarautuu kahdeksi oksaksi, jotka taas vuoden kuluttua haarautuvat kumpikin kahdeksi oksaksi ja niin edelleen.

a) Piirrä 3- ja 4-vuotias binääripuu.

b) Kuinka monta latvaoksaa on kuvan kymmenvuotiaalla binääripuulla?



176. Sievennä.

a) $3a^4 \cdot 7a^6$ **b)** $\dfrac{xx^{15}}{x^{12}}$ **c)** $b(b^3)^6$

177. Muodosta ja sievennä

a) monomien $5x$ ja x^4 tulon kuutio

b) monomien $6x^4$ ja $3x$ osamäärän viides potenssi.

178. Ilmaise kantaluvun 7 potenssina.

a) $7 \cdot 7^8 \cdot 7^{16}$ **b)** $\dfrac{7^6 \cdot 7^{13}}{7^{12}}$ **c)** $\dfrac{(7^5)^3}{7^5}$

179. Muunna luku tavalliseen muotoon ja lausu luku käyttämällä suurten lukujen lukusanoja.

a) $5 \cdot 10^9$ **b)** $1{,}98 \cdot 10^{11}$ **c)** $3{,}2 \cdot 10^{17}$

180. **a)** Päijänteen pinta-ala on $1\,118\ \text{km}^2$. Mikä Päijänteen pinta-ala on neliömetreinä? Ilmaise tulos myös kymmenpotenssimuodossa. Kuinka paljon tilaa jokaisella on, kun Päijänteen jäälle kokoontuu

b) 5,43 miljoonaa suomalaista

c) 7,1 miljardia maapallon asukasta?

181. Kuinka monta sekuntia 16 vuotta täyttävä henkilö on elänyt? Anna vastaus kymmenpotenssimuodossa kolmen numeron tarkkuudella. Karkausvuosia ei oteta huomioon.

182. Kumpi kokonaisluvuista 7^{75} ja 8^{65} on suurempi? Kuinka monta numeroa luvuissa on?

183. Vuonna 1975 syntynyt Sari ryhtyi tutkimaan esi-isiään. Kuinka monta esivanhempaa Sarilla on, kun mennään taaksepäin

a) kaksi sukupolvea (isovanhemmat)

b) kolme sukupolvea (isoisovanhemmat)

c) kymmenen sukupolvea?

d) Oletetaan, että sukupolvet seuraavat toisiaan 25 vuoden välein. Kuinka monta esivanhempaa Sarilla oli 1000-luvun alussa?

184. Paperiarkin paksuus on 0,11 mm. Arkki taitetaan kaksin kerroin, edelleen kaksin kerroin jne.

a) Arkki taitetaan 20 kertaa. Yltääkö taitetun arkin korkeus Helsingin olympiastadionin tornin korkeudelle 72 metriin?

b) Arkki taitetaan 60 kertaa. Kuinka moninkertainen arkin korkeus on verrattuna Maan etäisyyteen Auringosta (149,6 miljoonaa kilometriä)?

185. Raakaöljyn määrä on tapana ilmaista ns. tynnyreinä (engl. barrel, yksi tynnyri on 159 litraa). Maapallon todennettujen öljyvarojen suuruus vuonna 2011 oli 1 324 tuhatta miljoonaa tynnyriä. Öljynkulutus sen sijaan on tapana ilmaista tonneina. Vuonna 2011 öljynkulutus oli 4 011 miljoonaa tonnia. Yksi tonni raakaöljyä on 7,33 tynnyriä. Kuinka moneksi vuodeksi öljyä näiden lukujen perusteella riittää?

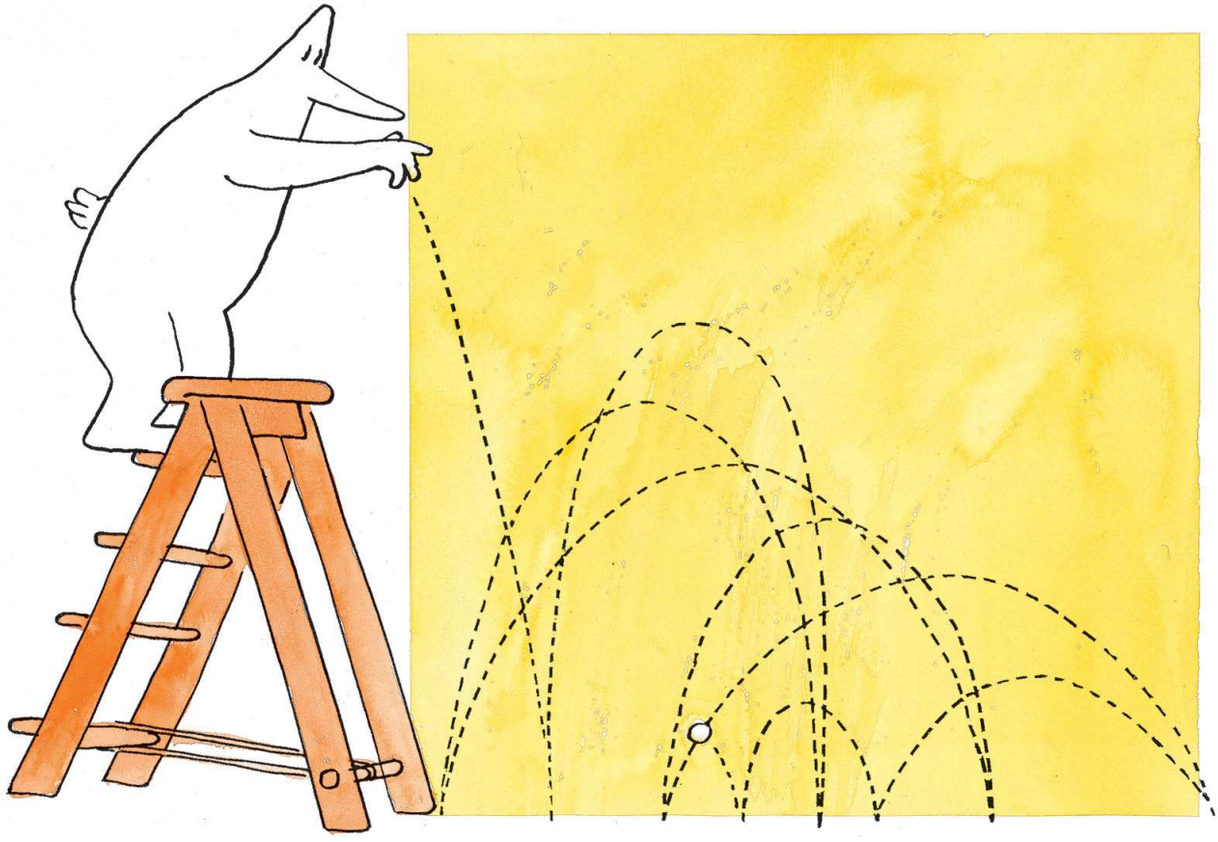
186. Eero sai ketjukirjeen, jossa on viiden nimen luettelo. Kirjeessä olevan ohjeen mukaan Eeron tulee lähettää viisi euroa luettelon ensimmäiselle. Lisäksi Eeron tulee lähettää tuttavilleen kuusi kopiota kirjeestä, josta hän poistaa luettelon ensimmäisen nimen ja lisää oman nimensä viimeiseksi. Jos Eero ja kaikki hänen ansiostaan kirjeen saavat toimivat ohjeen mukaan, kuinka paljon rahaa Eero saa?
Tällaiset rahaketjukirjeet on kielletty lailla useimmissa maissa, myös Suomessa. Miksi?

Eksponentiaalinen kasvaminen ja väheneminen

ONGELMA

Sopivalle alustalle pudotettu hyperpallo pomppaa korkeudelle, joka on 15 % pienempi kuin pudotuskorkeus. Pallo pudotetaan 2,0 metrin korkeudelta. Kuinka korkealle pallo kohoaa, kun se pomppaa maasta

a) kahdeksannen kerran **b)** 12. kerran?

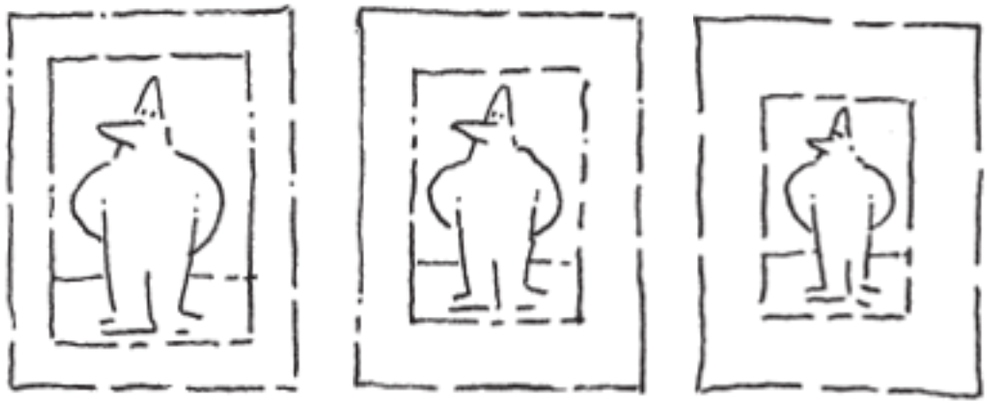


JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Kopiokone pienentää kuvion mitat 0,85-kertaisiksi. Saatu kopio pienennetään uudelleen, tämä taas uudelleen jne. Kuvion alkuperäinen korkeus on 27,0 cm.

a) Mikä on kuvion korkeus ensimmäisessä, toisessa, kolmannessa, neljännessä ja viidennessä kopiossa?

b) Mikä on kuvion korkeus 10., 15. ja 20. kopiossa?



RATKAISU

a) Ensimmäisessä kopiossa kuvion korkeus on $0{,}85 \cdot 27{,}0 \text{ cm} \approx 23{,}0 \text{ cm}$.

Seuraavan kopion korkeus saadaan aina kertomalla edellinen 0,85:lla. Laskuja suoritettaessa laskinta ei nollata välillä.

alkuperäinen	27,0 cm	
		$\cdot\, 0{,}85$
1. kopio	23,0 cm	
		$\cdot\, 0{,}85$
2. kopio	19,5 cm	
		$\cdot\, 0{,}85$
3. kopio	16,6 cm	
		$\cdot\, 0{,}85$
4. kopio	14,1 cm	
		$\cdot\, 0{,}85$
5. kopio	12,0 cm	

Viidennen kopion korkeuden laskemiseksi alkuperäinen korkeus 27 cm kerrottiin viidesti 0,85:llä:

$0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}85 \cdot 27 \text{ cm}$.

Lausekkeen voi merkitä ja laskea potenssin avulla:

$0{,}85^5 \cdot 27 \text{ cm}$.

b) 10., 15. ja 20. kopion korkeus on kätevintä laskea potenssin avulla.

10. kopio $0{,}85^{10} \cdot 27 \text{ cm} \approx 5{,}3 \text{ cm}$

15. kopio $0{,}85^{15} \cdot 27 \text{ cm} \approx 2{,}4 \text{ cm}$

20. kopio $0{,}85^{20} \cdot 27 \text{ cm} \approx 1{,}0 \text{ cm}$

VASTAUS

a) 23,0 cm, 19,5 cm, 16,6 cm, 14,1 cm ja 12,0 cm
b) 5,3 cm, 2,4 cm ja 1,0 cm

ESIMERKKI 2

Vuonna 2010 Virtasten asunto arvioitiin 250 000 euron arvoiseksi ja vuotta myöhemmin 270 000 euron arvoiseksi.
a) Kuinka monta prosenttia asunnon arvo kasvoi?
b) Mikä on asunnon arvo vuonna 2016, jos vuotuinen kasvuprosentti pysyy samana?

RATKAISU

a) Vuoden 2011 hinta on $\frac{270\,000}{250\,000} = 1{,}08 = 108\ \%$ edellisen vuoden hinnasta. Kasvu on 8 %.

b) Vuodesta 2010 vuoteen 2016 on kuusi vuotta. Jos asunnon arvo joka vuosi kasvaa 8 % eli 1,08-kertaistuu, kuuden vuoden kuluttua arvo on

$1{,}08^6 \cdot 250\,000 \text{ €} \approx 400\,000 \text{ €}$.

VASTAUS

a) 8 % **b)** 400 000 euroa

Eksponentiaalinen muutos

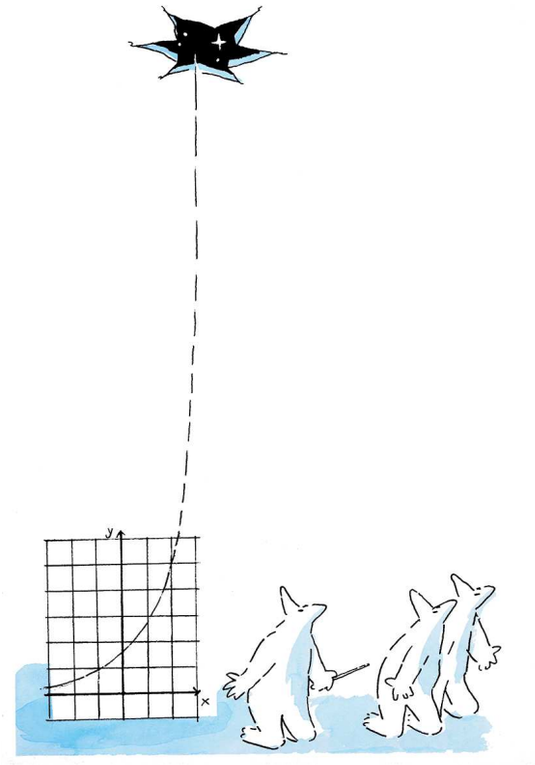
Jos suure jokaisessa muutosvaiheessa tulee kerrotuksi samalla luvulla, niin sanotaan, että suure muuttuu *eksponentiaalisesti*.
Jos eksponentiaalisesti muuttuvan suureen arvo alussa on a ja suure tulee jokaisessa muutosvaiheessa k-kertaiseksi, niin n muutosvaiheen jälkeen suureen arvo on $k^n \cdot a$.

Jos kerroin k on nollan ja yhden välissä $(0 < k < 1)$, suure *vähenee eksponentiaalisesti*.

> Esimerkissä 1 alunperin 27 cm korkean kuvion korkeus 0,85-kertaistui jokaisessa kopioinnissa. Kahden kopioinnin jälkeen korkeus on $0{,}85^2 \cdot 27$ cm, viiden kopioinnin jälkeen $0{,}85^5 \cdot 27$ cm ja yleisesti n kopioinnin jälkeen $0{,}85^n \cdot 27$ cm. Kuvion korkeus pienenee eksponentiaalisesti.

Jos kerroin k on suurempi kuin yksi $(k > 1)$, suure *kasvaa eksponentiaalisesti*.

> Esimerkissä 2 alunperin 250 000 euron arvoisen asunnon arvo kasvaa joka vuosi 8 % eli 1,08-kertaistuu. Kun on kulunut n vuotta, asunnon arvo on $1{,}08^n \cdot 250\,000$ euroa. Asunnon arvo kasvaa eksponentiaalisesti.

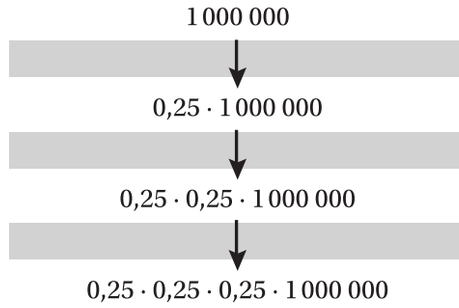


ESIMERKKI 3

Pölysuodatin pidättää 75 % tiettyä kokoa suuremmista pölyhiukkasista. Kuinka monta hiukkasta miljoonasta pääsee kuuden peräkkäisen suodattimen läpi?

RATKAISU

Kunkin suodattimen läpi pääsee $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$ pölyhiukkasista. Jokainen suodatin 0,25-kertaistaa suodattimeen tulevien hiukkasten määrän.



Ensimmäisen suodattimen läpi pääsee $0{,}25 \cdot 1\,000\,000$ hiukkasta, kahden ensimmäisen suodattimen läpi
$0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 1\,000\,000 = 0{,}25^2 \cdot 1\,000\,000$ hiukkasta jne.
Kuuden suodattimen läpi pääsee

$0{,}25^6 \cdot 1\,000\,000 \approx 240$ hiukkasta.

Hiukkasten lukumäärä pienenee eksponentiaalisesti.

VASTAUS

240 hiukkasta

ESIMERKKI 4

Kuinka monta prosenttia hinnat nousevat kymmenessä vuodessa, jos inflaatio on 4 % vuodessa?

RATKAISU

Olkoon hintataso alussa a. Inflaatioprosentti ilmaisee, kuinka monta prosenttia hinnat nousevat. Hinnat nousevat siis joka vuosi 4 %. Koska $100\,\% + 4\,\% = 104\,\% = 1{,}04$, hinnat tulevat joka vuosi 1,04-kertaisiksi.

Kymmenen vuoden kuluttua hintataso on

$1{,}04^{10} \cdot a \approx 1{,}48a$.

Hinnat nousevat eksponentiaalisesti.

Hinnat tulevat siis 1,48-kertaisiksi eli nousevat 48 %.

VASTAUS

48 %

HARJOITUKSIA

Sarja I

187. Laske kolmen numeron tarkkuudella $1{,}15^n \cdot 25$, kun n on

a) 1 **b)** 2
c) 12 **d)** 35.

188. Kopiokone suurentaa kuvion 1,2-kertaiseksi. Kuinka leveäksi alkuperäisen kuvion 0,90 mm leveä kirjain tulee, jos kuvio suurennetaan

a) kerran **b)** kahdesti
c) neljästi **d)** 30 kertaa?

189. Tiina sijoittaa 1 000 euroa. Mikä sijoituksen arvo on kymmenen vuoden kuluttua, jos sijoitus kasvaa vuosittain korkoa

a) 1,5 % **b)** 7 %?

190. Radioaktiivisille aineille on ominaista, että ne muuttuvat toisiksi aineiksi ja lähettävät samalla säteilyä. Tämä radioaktiivinen hajoaminen tapahtuu niin, että yhtä pitkän ajanjakson aikana aineen määrä vähenee aina yhtä monta prosenttia. Jodin radioaktiivisesta isotoopista 131, jota käytetään muun muassa kilpirauhassairauksien tutkimiseen ja hoitoon, hajoaa muiksi aineiksi 8,3 % vuorokaudessa. Näytteessä on 25 mikrogrammaa jodi-131:tä. Kuinka paljon jodi-131:tä on jäljellä

a) seitsemän vuorokauden
b) 30 vuorokauden
kuluttua?

191. Luonnonsuojelualueen peurakannan suuruudeksi laskettiin viime vuonna noin 1 600 yksilöä ja tänä vuonna noin 1 800. Oletetaan, että kannan vuotuinen kasvuprosentti on sama myös tulevaisuudessa. Mikä peurojen lukumäärä on kymmenen vuoden kuluttua?

192. Vedenpuhdistamossa tapahtuneen vian johdosta järveen joutui 2 400 kg suolaa. Järven laskujoen kautta suolaa poistui seuraavan viikon aikana 400 kg.

a) Kuinka monta prosenttia suolasta poistui viikossa?

b) Kuinka paljon suolaa on järvessä jäljellä neljän viikon ja kuinka paljon puolen vuoden kuluttua onnettomuudesta, jos suolasta poistuu viikossa aina sama prosenttiosuus?

193. Kuinka monta prosenttia palkat nousevat kahdeksassa vuodessa, jos ne nousevat joka vuosi

a) 1,5 % **b)** 4,0 %?

194. Koneen kirjanpitoarvo pienenee joka vuosi 10 %. Kuinka monta prosenttia uuden koneen arvosta kirjanpitoarvo on kahdeksan vuoden jälkeen?

195. Kuusihenkisen perheen isä käy yöllä jääkapilla ja ahmii puolet piirakasta. Kaikki muutkin käyvät vuorollaan syömässä puolet jäljellä olevasta piirakasta. Mikä osa piirakasta on aamulla jäljellä?

196. Lasi, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 65 % valosta. Kuinka monta prosenttia valosta läpäisee samanlaisesta massasta valmistetun lasin, jonka paksuus on 3,0 cm?

197. Vuonna 2010 elokuvalippu maksoi Suomessa keskimäärin 8,70 euroa ja seuraavana vuonna 9,00 euroa. Ennusta näiden tietojen perusteella elokuvalipun hinta vuosina 2016 ja 2030 olettaen, että hinta kasvaa

a) lineaarisesti

b) eksponentiaalisesti.

198. Kun kappale tuodaan ympäristöön, jonka lämpötila pysyy muuttumattomana, lämpötilaero tasoittuu eli kappale jäähtyy tai lämpenee ympäristön lämpötilaan. Lämpötilaero pienenee eksponentiaalisesti, eli yhtä pitkässä ajanjaksossa lämpötilaero pienenee aina yhtä monta prosenttia.

Jälkiruoka, jonka lämpötila oli 90 °C, vietiin ulos 10 °C:n lämpötilaan. Tunnin kuluttua jälkiruoan lämpötila oli 55 °C. Mikä jälkiruoan lämpötila on, kun ulos viemisestä on kulunut

a) kaksi tuntia

b) viisi tuntia?

Sarja II

199. Ensimmäisinä kuukausina vastasyntyneen pituus tulee joka kuukausi noin 1,04-kertaiseksi. Topi syntyi 54 cm:n mittaisena.

a) Ennusta Topin pituus yhden, kahden ja kolmen kuukauden ikäisenä.

b) Kuinka pitkä Topi olisi kolmevuotiaana, jos kasvu jatkuisi eksponentiaalisena?

200. Kopiokone pienentää kuvion kokoon, jonka mitat ovat $\frac{5}{6}$ alkuperäisistä mitoista. Kuinka korkeaksi 18 cm korkea kuva tulee, jos se pienennetään

a) kahdesti

b) viidesti

c) 20 kertaa?

201. Lauran syntyessä isoäiti talletti hänen nimelleen 1 500 euroa pankkitilille, jonka todellinen korko on 2,88 % vuodessa. Laura saa tyhjentää tilin täyttäessään 18 vuotta. Kuinka suureksi alkupääoma on tällöin kasvanut, jos korkoprosentti on koko ajan sama?

202. Lauran 18-vuotispäivänä pitsa maksoi 8 euroa. Jos vuotuinen inflaatio on 3 %, niin kuinka paljon samanlainen pitsa maksaa, kun Laura viettää 70-vuotisjuhlia?

203. Suomessa oli vuonna 1600 noin 300 000 asukasta. Mikä Suomen väkiluku olisi ollut vuonna 2000, jos väkiluku olisi kasvanut vuodessa keskimäärin

a) 0,3 % (Suomen nykyinen väestönkasvu)

b) 1,2 % (maapallon nykyinen väestönkasvu)?

204. Suodatin poistaa 30 % ilmassa olevista tiettyä kokoa suuremmista pölyhiukkasista. Tällaisten hiukkasten määrä kuutiosenttimetrissä puhdistamatonta ilmaa on 20 000. Kuinka monta pölyhiukkasta on kuutiosenttimetrissä ilmaa, joka on käynyt viiden samanlaisen suodattimen läpi?

205. Rajun inflaation vaivaamassa maassa leivän hinta (euroiksi muutettuna) oli kuukausi sitten 0,80 euroa. Nyt hinta on 2,80 euroa. Mikä olisi leivän hinta vuoden kuluttua, jos hinnan nousu jatkuisi eksponentiaalisena?

206. Intian väkiluku vuonna 1979 oli 616 miljoonaa ja vuotta myöhemmin 630 miljoonaa. Tuolloin laadittiin väestöennuste vuodelle 2000 olettaen, että vuotuinen väestönkasvuprosentti pysyy samana. Mikä Intian väkiluku vuonna 2000 olisi ollut tuon ennusteen mukaan?

207. Maapallon väkiluku kasvaa noin 1,2 % vuodessa. Kuinka monta prosenttia maapallon väkiluku kasvaa vuosikymmenessä?

208. Strontiumin radioaktiivisesta isotoopista strontium-90 hajoaa vuodessa muiksi aineiksi 2,6 %. Kuinka monta prosenttia isotoopin määrästä on jäljellä

a) 10 **b)** 50

vuoden kuluttua?

209. Liikemies tarjoutuu lainaamaan rahaa 0,2 prosentin päiväkorolla niin, että lainapääomaan lisätään joka päivä edellisen päivän pääomasta laskettu 0,2:n prosentin korko. Kuinka monta prosenttia vuosikorko on?

210. Kuuluisan väestöteorian, niin sanotun Malthusin* teorian mukaan väestön määrä kasvaa eksponentiaalisesti, kun taas ravinnon määrä kasvaa lineaarisesti. Teorialla on ollut merkitystä muun muassa kehitysmaiden olojen tutkimisessa. Oletetaan, että eristyneissä oloissa elävän väestön määrä vuonna 2010 oli 100 000 ja seuraavana vuonna 103 000. Oletetaan, että väestön käytettävissä olevan ravinnon määrä vuonna 2010 oli 100 000 yksikköä ja seuraavana vuonna 105 000 yksikköä. Mikä on Malthusin teorian mukaan ravinnon määrä henkeä kohden vuonna

a) 2010 **b)** 2020 **c)** 2100?

211. Jääkaappiin 5 °C:n lämpötilaan 40 °C:n lämpöisenä viety simapullo jäähtyi tunnissa 25 °C:n lämpöiseksi. Mikä siman lämpötila on, kun jääkaappiin viemisestä on kulunut

a) kaksi tuntia

b) kuusi tuntia?

Kun kappale tuodaan ympäristöön, jonka lämpötila pysyy muuttumattomana, lämpötilaero pienenee yhtä pitkässä ajanjaksossa aina yhtä monta prosenttia.

212. Saunaan 90 °C :n lämpötilaan viety 15 °C:n lämpöinen järvivesi lämpeni puolessa tunnissa 30 °C:n lämpöiseksi. Mihin lämpötilaan vesi lämpenee kahdessa tunnissa?

* Thomas Malthus (1766–1834), englantilainen pappi ja taloustieteilijä

Negatiivinen eksponentti

ONGELMA

Sopivissa oloissa erään bakteeriviljelmän massa viisinkertaistuu aina tunnissa. Eräällä hetkellä viljelmän massan suuruudeksi mitattiin 500 g. Olkoon t havaintohetkestä kulunut aika tunteina. Määritä viljelmän massa hetkellä

a) $t = 1$ **b)** $t = 4$ **c)** $t = -1$ **d)** $t = -3$.

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Massahiihdon osanottajamäärä oli tänä vuonna 8 600. Osanottajamäärä on vuosittain kaksinkertaistunut, ja oletetaan, että kasvu jatkuu samanlaisena.

a) Kuinka paljon osanottajia on yhden, kahden ja viiden vuoden kuluttua?

b) Mikä osanottajien määrä oli yksi, kaksi ja viisi vuotta sitten?

c) Olkoon t tästä vuodesta kulunut aika vuosina. Kokoa a- ja b-kohtien tulokset oheiseen taulukkoon.

aika nykyhetkestä t (vuosia)	osanottaja-määrä	luvun 8 600 kerroin
5		
2		
1		
0		
–1		
–2		
–5		

RATKAISU

a) Osanottajamäärä kasvaa eksponentiaalisesti niin, että osanottajia on vuoden kuluttua

$2 \cdot 8\,600 \approx 17\,000,$

kahden vuoden kuluttua

$2^2 \cdot 8\,600 \approx 34\,000$

ja viiden vuoden kuluttua

$2^5 \cdot 8\,600 \approx 280\,000.$

Yleisesti n vuoden kuluttua $2^n \cdot 8\,600$.

b) Vuoden takainen osanottajamäärä on nyt kaksinkertaistunut. Osanottajamäärä vuosi sitten oli

$$\frac{8\,600}{2} = 4\,300.$$

Tämänvuotinen määrä jaettuna 2:lla.

Kahden vuoden takainen osanottajamäärä on nykyhetkeen tultaessa tullut $2 \cdot 2 = 2^2$-kertaiseksi eli nelinkertaiseksi. Osanottajamäärä kaksi vuotta sitten oli

$$\frac{8\,600}{2^2} \approx 2\,200.$$

Tämänvuotinen määrä jaettuna 2^2:lla.

Viiden vuoden takainen osanottajamäärä on nykyhetkeen tultaessa tullut $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$-kertaiseksi. Osanottajamäärä viisi vuotta sitten oli

$$\frac{8\,600}{2^5} \approx 270.$$

Tämänvuotinen määrä jaettuna 2^5:llä.

c) Aikamuuttujan t positiiviset arvot viittaavat tulevaisuuteen, hetki $t = 0$ on nykyhetki, ja t:n negatiiviset arvot viittaavat menneisyyteen.

Kolmannen sarakkeen täyttämiseksi osan laskeminen muutetaan kertolaskuksi.

$$\frac{8\,600}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8\,600$$

$$\frac{8\,600}{2^2} = \frac{1}{2^2} \cdot 8\,600$$

$$\frac{8\,600}{2^5} = \frac{1}{2^5} \cdot 8\,600$$

aika nykyhetkestä t (vuosia)	osanottajamäärä	luvun 8 600 kerroin
5	$2^5 \cdot 8\,600$	2^5
2	$2^2 \cdot 8\,600$	2^2
1	$2 \cdot 8\,600$	2
0	$1 \cdot 8\,600$	1
-1	$\frac{8\,600}{2}$	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{8\,600}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
-5	$\frac{8\,600}{2^5}$	$\frac{1}{2^5}$

VASTAUS

a) 17 000, 34 000 ja 280 000
b) 4 300, 2 200 ja 270

Jos määritellään $2^0 = 1$, $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ ja $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$, niin edellisen esimerkin hiihtäjämäärät myös nykyhetkellä ja menneisyydessä saadaan kertomalla luvun 2 potenssilla. Tämä havainto perustelee seuraavia määritelmiä.

Potenssin määritelmä, kun eksponentti on nolla

Oletetaan, että kantaluku k ei ole nolla $(k \neq 0)$. Tällöin:

$k^0 = 1.$ — Kun eksponentti on 0, potenssin arvo on 1.

Kantaluvulle 0 ei määritellä potenssia, jonka eksponentti on 0. Potenssi 0^0 ei ole määritelty.

Potenssin määritelmä, kun eksponentti on negatiivinen kokonaisluku

Oletetaan, että kantaluku k ei ole nolla $(k \neq 0)$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tällöin:

$k^{-n} = \frac{1}{k^n}$. — Potenssin k^n käänteisluku.

Siis

$k^{-1} = \frac{1}{k}$ — Kantaluvun k käänteisluku.

$k^{-2} = \frac{1}{k^2}$ — Potenssin k^2 käänteisluku.

$k^{-3} = \frac{1}{k^3}$ — Potenssin k^3 käänteisluku.

jne.

Kantaluvulle 0 ei määritellä potensseja, joiden eksponentti on negatiivinen kokonaisluku.

ESIMERKKI 2

Laske potenssin arvo.

a) 4^0 **b)** 7^{-1} **c)** 9^{-2}

RATKAISU

Potenssien tarkat arvot voidaan laskea symbolisella laskimella. Voidaan myös laskea määritelmän mukaisesti.

a) $4^0 = 1$

Kun eksponentti on 0, potenssin arvo on 1.

b) $7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$

Luvun 7 käänteisluku.

c) $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$

Luvun 9^2 käänteisluku.

VASTAUS

a) 1 **b)** $\frac{1}{7}$ **c)** $\frac{1}{81}$

ESIMERKKI 3

Yhdeksän vuotta sitten hankittujen osakkeiden arvo on kasvanut joka vuosi 8 %. Osakkeiden arvo on nyt 1 999 euroa. Kuinka paljon osakkeista maksettiin yhdeksän vuotta sitten?

RATKAISU

Koska $100\,\% + 8\,\% = 108\,\% = 1{,}08$, osakkeiden arvo on tullut joka vuosi 1,08-kertaiseksi.

Arvo yhdeksän vuotta sitten voidaan laskea käyttämällä potenssia, jonka eksponentti on negatiivinen.

Yhdeksän vuotta sitten eli ajankohtana -9 osakkeiden arvo oli

$1{,}08^{-9} \cdot 1\,999 \text{ euroa} \approx 1\,000 \text{ euroa}$.

VASTAUS

1 000 euroa

ESIMERKKI 4

Ilmaise desimaalilukuna.

a) 10^{-2} **b)** 10^{-5} **c)** $7{,}2 \cdot 10^{-6}$

RATKAISU

a) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$ Luvun 10^2 käänteisluku.

$= \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ yksi sadasosa

b) $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5}$ Luvun 10^5 käänteisluku.

$= \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$ yksi sadastuhannesosa

c) $7{,}2 \cdot 10^{-6} = 7{,}2 \cdot \dfrac{1}{10^6}$ 7,2 miljoonasosaa

$= 7{,}2 \cdot 0{,}000\,001 = 0{,}000\,007\,2$

VASTAUS

a) 0,01 (yksi sadasosa)
b) 0,000 01 (yksi sadastuhannesosa)
c) 0,000 007 2

Kymmenpotenssimuoto, kun eksponentti on negatiivinen

Lukuyksiköt kymmenesosa, sadasosa, tuhannesosa jne. voidaan ilmaista luvun 10 potensseina, joiden eksponentti on negatiivinen.

$10^{-1} = 0{,}1$	kymmenesosa
$10^{-2} = 0{,}01$	sadasosa
$10^{-3} = 0{,}001$	tuhannesosa
$10^{-4} = 0{,}000\,1$	kymmenestuhannesosa

jne.

Pieniä lukuja merkitään usein käyttämällä luvun 10 potensseja.

Esimerkiksi on

$5{,}8 \cdot 10^{-7} = 5{,}8 \cdot 0{,}000\,000\,1$ Luvussa 10^{-7} on pilkun jälkeen kuusi nollaa ja seitsemäs numero on 1.

$= 0{,}000\,000\,58$

ja

$0{,}000\,009\,13 = 9{,}13 \cdot 0{,}000\,001$ Luvussa 0,000 001 pilkun jälkeen ykkönen tulee kuudentena numerona.

$= 9{,}13 \cdot 10^{-6}$. Luvun 10 potenssi on 10^{-6}.

ESIMERKKI 5 Laske laskimella potenssin $0{,}5^{25}$ likiarvo kolmen numeron tarkkuudella.

RATKAISU

Kun potenssi näppäillään laskimeen, näyttöön ilmestyy jotain seuraavankaltaista:

2.9802322E–8

tai

2.9802322 –8.

Laskin ilmaisee tuloksen luvun 10 potenssin avulla. Kolmen numeron tarkkuudella on

$0{,}5^{25} \approx 2{,}98 \cdot 10^{-8} = 2{,}98 \cdot 0{,}000\,000\,01 = 0{,}000\,000\,029\,8.$

Symbolinen laskin saattaa myös ensi vaiheessa näyttää potenssin arvon yhden numeron tarkkuuteen pyöristettynä muodossa 0,00000003. Kymmenpotenssimuoto saadaan, kun tulos kopioidaan seuraavalle laskuriville.

VASTAUS

Luvun 10 potenssien avulla ilmaistuna $2{,}98 \cdot 10^{-8}$ ja tavallisessa muodossa 0,000 000 029 8.

HARJOITUKSIA

Sarja I

213. Laske potenssin arvo.

a) 6^0 **b)** 6^{-1}

c) 7^{-2} **d)** 3^{-4}

e) 1^{-9}

214. Laske laskimella kahden numeron tarkkuudella.

a) $0{,}82^{-9}$ **b)** $0{,}20^{-11}$

215. Menestyvä yritys on vuosittain 1,3-kertaistanut myyntinsä. Myynnin arvo on nyt 45 miljoonaa euroa.

a) Mikä myynnin arvo on kolmen vuoden kuluttua, jos myynnin kasvu pysyy samanlaisena?

b) Mikä myynnin arvo oli neljä ja kuusi vuotta sitten?

216. Maapallon väkiluku ylitti 7 miljardin rajan vuonna 2011, ja kasvuvauhti oli 1,2 % vuodessa. Arvioi näiden tietojen avulla, mikä maapallon väkiluku oli vuonna 1970.

217. Leilan syntyessä kummitäti avaa sijoitustilin, jonka korot lisätään vuosittain pääomaan. Kummitäti haluaa, että Leilan täyttäessä 20 vuotta tilillä on 2 000 euroa. Kuinka paljon tilille on sijoitettava alkupääomaksi, jos vuotuinen korko on

a) 1,50 % **b)** 3,00 %?

Anna vastaus euron tarkkuudella.

218. Ilmaise desimaalilukuna.

a) 10^{-5} **b)** $6{,}18 \cdot 10^{-4}$

c) $2{,}0 \cdot 10^{-7}$

219. Laske laskimella kolmen numeron tarkkuudella. Ilmaise tulos tavallisessa desimaalimuodossa.

a) $\dfrac{0{,}41}{1\,711\,905}$ **b)** $6{,}1^{-7}$

c) $0{,}99^{2013}$

220. Verisolun halkaisija on $7{,}2 \cdot 10^{-6}$ m. Biologian kirjan kuvassa verisolun halkaisija on 4,1 cm. Kuinka moninkertainen suurennos on?

221. Aikuisen miehen päivittäinen A-vitamiinin tarve on 0,6 milligrammaa ja folaatin (B9-vitamiinin) tarve 0,2 milligrammaa. Sadassa grammassa ranskanperunoita on 0,5 mikrogrammaa A-vitamiinia ja 9,9 mikrogrammaa folaattia. Kuinka suuri määrä ranskanperunoita riittää tyydyttämään päivittäisen

a) A-vitamiinin tarpeen

b) folaatin tarpeen?

Yksi milligramma (mg) on 10^{-3} grammaa ja yksi mikrogramma (µg) 10^{-6} grammaa.

222. Auringon massa on $1{,}99 \cdot 10^{33}$ g ja vetyatomin massa $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g.

a) Kumpi on suurempi, oman massasi suhde vetyatomin massaan vai Auringon massan suhde omaan massaasi?

b) Tiinan massan suhde vetyatomin massaan on yhtä suuri kuin Auringon massan suhde Tiinan massaan. Kuinka suuri Tiinan massa on?

Sarja II

223. Laske potenssin arvo.

a) 12^{-1} **b)** 9^{0}

c) 6^{-3} **d)** 3^{-6}

224. Laske lausekkeen tarkka arvo.

a) $8 \cdot 6^{-2}$ **b)** $3 \cdot 18^{-1}$

c) $7^{4} \cdot 7^{-7} \cdot 7$

225. Intian väkiluku vuonna 2012 oli 1,22 miljardia ja väestö kasvoi 1,4 % vuodessa. Laske näiden tietojen avulla arvio Intian väkiluvulle vuonna 1980.

226. Sopivissa oloissa eräiden hiivasolujen määrä viisinkertaistuu vuorokaudessa. Nykyinen määrä on noin 1,0 miljoonaa. Kuinka paljon hiivasoluja

a) on viikon kuluttua

b) oli viikko sitten?

227. Koboltin radioaktiivisesta isotoopista koboltti-60 hajoaa (eli muuttuu muiksi alkuaineiksi) 12,3 % vuodessa. Näytteessä on nyt 100 mg isotooppia. Kuinka paljon isotooppia oli kymmenen vuotta sitten?

228. Laske laskimella kolmen numeron tarkkuudella. Ilmaise tulos tavallisessa desimaalimuodossa.

a) $0{,}000\,79 \cdot 0{,}000\,045\,1$

b) $\dfrac{3{,}15}{2{,}13 \cdot 6^{8}}$

229. Elektronin massa on $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ja protonin $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Kumman alkeishiukkasen massa on suurempi?

b) Kuinka moninkertainen massaltaan suuremman alkeishiukkasen massa on pienemmän hiukkasen massaan verrattuna?

230. Teräksen pituuden lämpötilakerroin on $12 \cdot 10^{-6}/°\text{C}$. Teräskappaleen pituuden muutos kappaleen lämmetessä saadaan kertomalla alkuperäinen pituus lämpötilan muutoksella asteina ja lämpötilakertoimella. Kuinka paljon pitenee 52 metrin pituinen ratakisko, kun lämpötila nousee 30 °C?

231. EU-normien mukaan suurin kaloissa sallittu määrä dioksiinia on neljä pikogrammaa grammassa kalan tuorepainoa. Yksi pikogramma on 10^{-12} grammaa. Itämeren silakoissa ja lohissa dioksiinin määrä on kolminkertainen. Itämeren silakoiden kokonaismassan arvioidaan olevan 400 000 tonnia. Kuinka suuri Itämeren silakoissa olevan dioksiinin kokonaismäärä on?

2 Eksponenttifunktio

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Suotuisissa kasvuoloissa erään bakteeriviljelmän massa kasvaa joka tunti 1,7-kertaiseksi. Tällä hetkellä massa on 3,1 g.

a) Kuinka suuri viljelmän massa on neljän tunnin kuluttua?

b) Kuinka suuri massa oli kolme tuntia sitten?

c) Muodosta funktio, joka ilmaisee, kuinka suuri massa on x tunnin kuluttua. Laske funktion avulla massa 0,5 tunnin kuluttua ja 1,5 tuntia sitten. Piirrä funktion kuvaaja.

RATKAISU

a) Neljän tunnin kuluttua massa on

$1{,}7^4 \cdot 3{,}1 \approx 26$ (g).

Massa kasvaa eksponentiaalisesti.

b) Kolme tuntia sitten massa oli

$1{,}7^{-3} \cdot 3{,}1 \approx 0{,}63$ (g).

Nykyhetkeä edeltävät arvot voidaan laskea kertomalla potenssilla, jonka eksponentti on negatiivinen.

c) Kasvuston massan x tunnin kuluttua ilmaisee funktio

$f(x) = 1{,}7^x \cdot 3{,}1$.

Aikamuuttujan x tulevaisuuteen viittaava arvo on positiivinen ja menneisyyteen viittaava negatiivinen.

Massa 0,5 tunnin kuluttua on

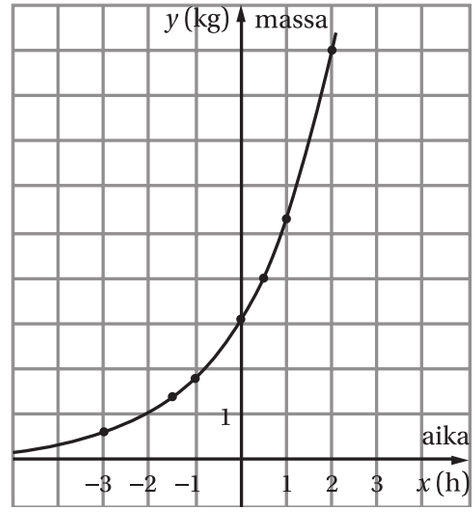
$f(0{,}5) = 1{,}7^{0{,}5} \cdot 3{,}1 \approx 4{,}0$ (g).

Massa 1,5 tuntia sitten oli

$f(-1{,}5) = 1{,}7^{-1{,}5} \cdot 3{,}1 \approx 1{,}4$ (g).

Kuvaajan piirtämiseksi kootaan edellä lasketut funktion f arvot ja lasketaan lisäksi funktion arvo kohdissa $x = -1,\ 0,\ 1$ ja 2. Arvojen laskemiseksi voidaan funktio $f(x) = 1{,}7^x \cdot 3{,}1$ määritellä symboliseen laskimeen.

x	$f(x)$	(x, y)
-3	0,63	$(-3;\ 0{,}63)$
$-1{,}5$	1,4	$(-1{,}5;\ 1{,}4)$
-1	1,8	$(-1;\ 1{,}8)$
0	3,1	$(0;\ 3{,}1)$
0,5	4,0	$(0{,}5;\ 4{,}0)$
1	5,3	$(1;\ 5{,}3)$
2	9,0	$(2;\ 9{,}0)$
4	26	$(4,\ 26)$



Kuvaaja voidaan piirtää myös symbolisen laskimen piirtoikkunaan.

VASTAUS

a) 26 g **b)** 0,63 g
c) funktio $f(x) = 1{,}7^x \cdot 3{,}1$; 0,5 tunnin kuluttua 4,0 g ja 1,5 tuntia sitten 1,4 g

Eksponenttifunktio

Oletetaan, että kantaluku k on positiivinen $(k > 0)$. Tällöin potenssin k^x arvo voidaan laskea kaikilla muuttujan x arvoilla.

Funktiota, jonka lauseke on k^x, sanotaan *eksponenttifunktioksi*.

Eksponenttifunktiossa siis muuttujana on eksponentti.

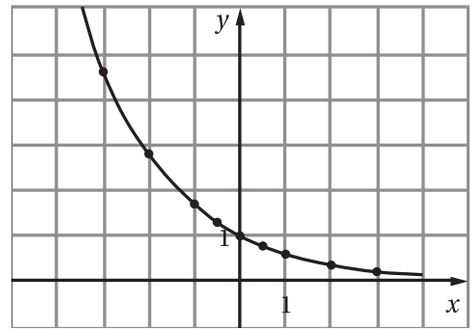
ESIMERKKI 2

Laske yhden desimaalin tarkkuudella eksponenttifunktion $g(x) = 0{,}6^x$ arvot $g(3)$, $g(2)$, $g(1)$, $g(0{,}5)$, $g(0)$, $g(-0{,}5)$, $g(-1)$, $g(-2)$ ja $g(-3)$. Hahmottele laskettujen arvojen avulla funktion kuvaaja.

RATKAISU

Arvojen laskemista varteen voidaan funktio $g(x) = 0{,}6^x$ määritellä symboliseen laskimeen.

x	$g(x) = 0{,}6^x$	(x, y)
3	0,2	(3; 0,2)
2	0,4	(2; 0,4)
1	0,6	(1; 0,6)
0,5	0,8	(0,5; 0,8)
0	1	(0, 1)
–0,5	1,3	(–0,5; 1,3)
–1	1,7	(–1; 1,7)
–2	2,8	(–2; 2,8)
–3	4,6	(–3; 4,6)



Kuvaaja voidaan piirtää myös symbolisen laskimen piirtoikkunaan.

ESIMERKKI 3

Fluorin radioaktiivista isotooppia fluori-18 käytetään lääketieteessä merkkiaineena aivosairauksien tutkimuksissa. Isotoopista hajoaa 32 % tunnissa. Potilaalle annetaan 3,6 milligramman annos.

a) Kuinka paljon isotooppia on jäljellä 2,5 tunnin kuluttua?

b) Annos valmistettiin puoli tuntia ennen sen antamista potilaalle. Kuinka suureksi annos piti tehdä?

RATKAISU

a) Koska $100\ \% - 32\ \% = 68\ \% = 0{,}68$, aineen massa tulee joka tunti 0,68-kertaiseksi. Aineen määrän milligrammoina x tunnin kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 0{,}68^x \cdot 3{,}6$.

Aineen määrä 2,5 tunnin kuluttua on

$f(2{,}5) \approx 1{,}4$ (mg).

b) Hetkeä puoli tuntia sitten vastaa muuttujan arvo $x = -0{,}5$. Puoli tuntia sitten aineen määrä oli

$f(-0{,}5) \approx 4{,}4$ (mg).

VASTAUS

a) 1,4 mg **b)** 4,4 mg

ESIMERKKI 4

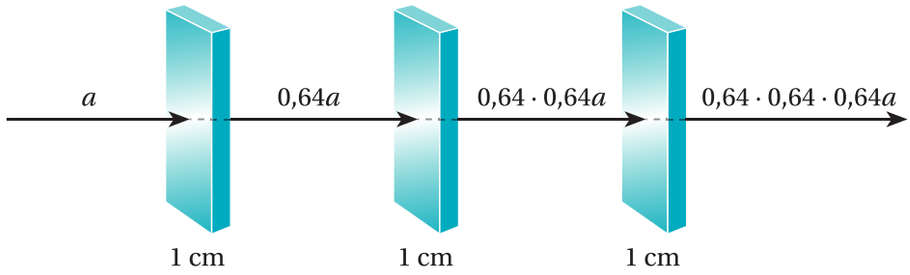
Muovilevy, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 64 % siihen tulevasta valosta. Kuinka monta prosenttia valosta läpäisee levyn, jonka paksuus on

a) 4,0 cm **b)** 2,4 cm **c)** 0,32 cm?

RATKAISU

a) Olkoon valon alkuperäinen määrä a.

Senttimetrin paksuisen kerroksen läpäisee 64 % siihen tulevan valon määrästä. Siis jokainen senttimetrin paksuinen kerros levyä 0,64-kertaistaa siihen tulevan valon määrän.



Kun valo on läpäissyt 4,0 senttimetrin paksuisen levyn, valon määrä on tullut $0{,}64^4$-kertaiseksi.

$0{,}64^4 \cdot a \approx 0{,}17a$

Valosta on jäljellä 17 %.

b) Kun valo on läpäissyt x senttimetrin paksuisen levyn, valon määrä on tullut $0{,}64^x$-kertaiseksi. Valon määrän ilmaisee funktio $g(x) = 0{,}64^x a$.

Kun levyn paksuus on 2,4 cm, valon määrä on $g(2{,}4) = 0{,}64^{2{,}4} \cdot a \approx 0{,}34a$. Alkuperäisestä valon määrästä a on jäljellä 34 %.

c) Kun levyn paksuus on 0,32 cm, valon määrä on
$g(0{,}32) = 0{,}64^{0{,}32} \cdot a \approx 0{,}87a$.
Valosta on jäljellä 87 %.

VASTAUS

a) 17 % **b)** 34 % **c)** 87 %

HARJOITUKSIA

Sarja I

232. Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $h(x) = 2{,}3^x$ arvo

a) $h(3{,}7)$ **b)** $h(-0{,}7)$

c) $h(-5{,}2)$.

233. Laske eksponenttifunktion $f(x) = 2^x$ arvot $f(3)$, $f(2)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$, $f(-1)$ ja $f(-2)$. Piirrä laskettujen arvojen avulla funktion kuvaaja.

234. Laske kahden desimaalin tarkkuudella funktion $g(x) = 0{,}4^x \cdot 3$ arvot $g(4)$, $g(2)$, $g(1)$, $g(0{,}5)$, $g(0)$ ja $g(-1)$. Piirrä laskettujen arvojen avulla funktion kuvaaja. Kuinka funktion arvot muuttuvat, kun muuttujan x arvot suurenevat?

235. Jos jauhelihaa pidetään huoneenlämmössä, lihassa olevien bakteerien lukumäärä 7,9-kertaistuu joka tunti. Bakteerien lukumäärä keittiön pöydälle unohtuneessa jauhelihakilossa on nyt 7 500. Muodosta funktio $b(x)$, joka ilmaisee bakteerien lukumäärän x tunnin kuluttua. Mikä bakteerien määrä

a) on 3,5 tunnin kuluttua

b) oli 2,5 tuntia sitten?

236. Cesiumin radioaktiivisen isotoopin cesium-137 määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena 2,3 % vuodessa. Ydinjätevarastossa on nyt 3,28 kg ainetta. Muodosta funktio $m(x)$, joka ilmaisee isotoopin määrän kilogrammoina x vuoden kuluttua.

a) Kuinka paljon ainetta on jäljellä 15 vuoden kuluttua?

b) Isotooppierä tuotiin varastoon 1,5 vuotta sitten. Mikä erän suuruus silloin oli?

237. Suodatin, jonka paksuus on 1,0 cm, päästää lävitseen 25 % tiettyä kokoa suuremmista ilman pölyhiukkasista. Tällaisten hiukkasten lukumäärä kuutiosenttimetrissä ilmaa on 25 000. Kuinka paljon pölyhiukkasia jää ilmaan, kun se puhdistetaan samasta aineesta tehdyllä suodattimella, jonka paksuus on

a) 3,5 cm **b)** 3,0 mm?

238. Eräästä radioaktiivisesta aineesta hajoaa tunnissa 47 %. Aineen määrä on nyt 85 g. Kuinka paljon ainetta

a) on 45 minuutin kuluttua

b) oli 45 minuuttia sitten?

239. Bakteeriviljelmän massa kolminkertaistuu vuorokaudessa. Kuinka monta prosenttia massa kasvaa 10 tunnissa?

240. Erään lääkeaineen pitoisuus elimistössä puolittuu viidessä tunnissa. Kuinka monta prosenttia pitoisuus pienenee vuorokaudessa? (Ohje: Kuinka monta viiden tunnin jaksoa vuorokaudessa on?)

Sarja II

241. Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $g(x) = 0{,}81^x$ arvo

a) $g(3{,}4)$ **b)** $g(0{,}3)$

c) $g(-0{,}9)$ **d)** $g(-7{,}5)$.

242. Laske kahden desimaalin tarkkuudella funktion $f(x) = 1{,}5 \cdot 2{,}4^x$ arvot $f(2)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$, $f(-1)$ ja $f(-3)$. Hahmottele funktion kuvaaja laskettujen arvojen avulla. Kuinka funktion arvot muuttuvat, kun muuttujan x arvot suurenevat?

243. Saarelle tuotujen kanien lukumäärä kaksinkertaistuu vuosittain. Kaneja on nyt 750. Kuinka paljon kaneja saarella

a) on 2,5 vuoden kuluttua

b) oli 1,5 vuotta sitten?

244. Bakteeriviljelmän massa 3,0-kertaistuu vuorokaudessa. Massa on nyt 250 g. Muodosta funktio $m(x)$, joka ilmaisee viljelmän massan grammoina x vuorokauden kuluttua. Laske massa

a) 3,5 vuorokauden kuluttua

b) 2,5 vuorokautta sitten

c) kymmenen tunnin kuluttua

d) kahdeksan tuntia sitten.

245. Kolibakteerien lukumäärä liuoksessa on 1 900. Bakteerien lukumäärän tiedetään 7,9-kertaistuvan tunnissa. Mikä bakteerien lukumäärä

a) on 20 minuutin kuluttua

b) on 40 minuutin kuluttua

c) oli 40 minuuttia sitten?

246. Radioaktiivisen radonkaasun määrä vähenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena. Jäljellä olevan kaasun massan ilmaisee funktio $m(t) = 0{,}83^t \cdot m_0$, missä t on aika vuorokausina ja m_0 on massa hetkellä $t = 0$.

a) Kuinka monta prosenttia radonista hajoaa vuorokaudessa?

Jos massa nyt on 75 mg, niin kuinka suuri massa

b) on 20 vuorokauden kuluttua

c) oli 10 vuorokautta sitten?

247. Heijastamaton lasi, jonka paksuus on 1,0 cm, pidättää 25 % valosta. Kuinka monta prosenttia valosta pidättää samasta materiaalista tehty lasi, jonka paksuus on

a) 1,3 cm **b)** 0,40 cm?

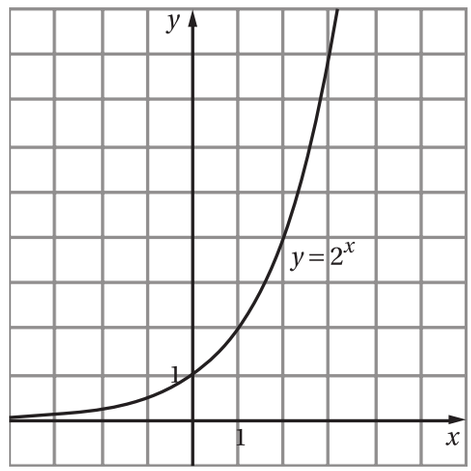
248. Sepelvaltimotaudin vaara riippuu tilastojen perusteella muun muassa henkilön seerumin kolesterolipitoisuudesta. Eräiden tutkimustulosten mukaan vaara kaksinkertaistuu aina, kun kolesterolipitoisuus kasvaa 1,5 mmol/l. Henkilön A kolesterolitaso on 7,5 mmol/l ja henkilön B 5,2 mmol/l. Kuinka moninkertainen tämän perusteella sepelvaltimotaudin riski on A:lla verrattuna B:n riskiin? (Ohje: Kuinka monta riskin kaksinkertaistavaa askelta on tasosta 5,2 mmol/l tasoon 7,5 mmol/l?)

Logaritmi

ONGELMA

a) Ilmaise luvut 8, 4, 1 ja $\frac{1}{2}$ luvun 2 potensseina.

b) Päättele funktion $f(x) = 2^x$ kuvaajasta likimääräisesti sellainen luku x, että $2^x = 6$.



JOHDANTO-ESIMERKKI 1

a) Ilmaise luvut 9, 81 ja $\frac{1}{3}$ luvun 3 potensseina.

b) Päättele funktion $f(x) = 3^x$ kuvaajasta likimääräisesti sellainen luku x, että $3^x = 6$.

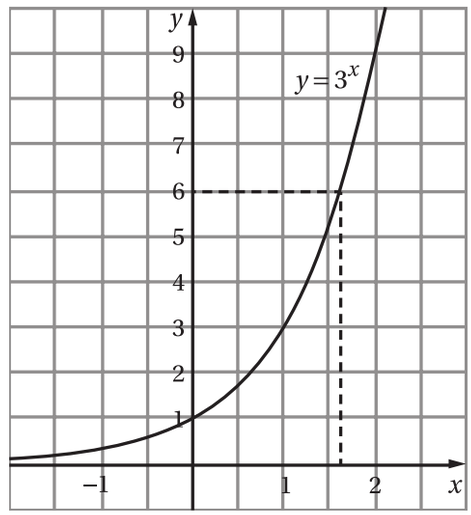
RATKAISU

a) Luku 9 on luvun 3 neliö eli $9 = 3^2$.

Koska $81 = 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, niin $81 = 3^4$.

Luku $\frac{1}{3}$ on luvun 3 käänteisluku eli luku 3 korotettuna potenssiin -1. Siis $\frac{1}{3} = 3^{-1}$.

b) Funktion $f(x) = 3^x$ kuvaajan perusteella $3^x \approx 6$, kun $x \approx 1{,}6$.



VASTAUS

a) $9 = 3^2$, $81 = 3^4$, $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

b) $x \approx 1{,}6$

Johdantoesimerkissä 1 ilmaistiin luvut 9, 81, $\frac{1}{3}$ ja 6 luvun 3 potensseina. Löydetyt eksponentin arvot ovat näiden lukujen 3-*kantaisia logaritmeja*.

$9 = 3^2$, joten luvun 9 3-kantainen logaritmi on 2.
$81 = 3^4$, joten luvun 81 3-kantainen logaritmi on 4.
$\frac{1}{3} = 3^{-1}$, joten luvun $\frac{1}{3}$ 3-kantainen logaritmi on -1.
$6 \approx 3^{1,6}$, joten luvun 6 3-kantainen logaritmi on noin 1,6.

Yleisesti määritellään:

Logaritmin määritelmä

Olkoon k positiivinen luku.

Luvun a k-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun luku a ilmaistaan k:n potenssina.

Siis luku x on luvun a k-kantainen logaritmi, jos $k^x = a$.

Logaritmin määritelmässä oletetaan, että kantaluku k on positiivinen. Koska positiivisen luvun kaikki potenssit ovat positiivisia, vain positiiviset luvut voidaan ilmaista k:n potensseina. Siis logaritmeja voidaan määrittää vain positiiviselle luvuille.

ESIMERKKI 2

Määritä luvun 10-kantainen logaritmi.
a) 10^9 **b)** 1 000 **c)** 0,0001

RATKAISU

a) Luku 10^9 on jo ilmaistu luvun 10 potenssina. Eksponentin arvo on 9. Luvun 10^9 10-kantainen logaritmi on 9.

b) Ilmaistaan luku 1 000 kantaluvun 10 potenssina.

$1\,000 = 10^3$

Luvun 1 000 10-kantainen logaritmi on 3.

c) Ilmaistaan luku 0,0001 kantaluvun 10 potenssina.

$0{,}0001 = 10^{-4}$

Luvun 0,0001 10-kantainen logaritmi on -4.

VASTAUS

a) 9 **b)** 3 **c)** -4

Logaritmin merkitseminen

Luvun a k-kantainen logaritmi merkitään $\log_k a$.

Johdantoesimerkissä 1 havaittiin, että $\log_3 81 = 4$.
Esimerkissä 2 havaittiin, että $\log_{10} 1\,000 = 3$.

Luvun a 10-kantaista logaritmia merkitään myös $\lg a$.

$\lg a = \log_{10} a$

Esimerkissä 2 havaittiin, että $\lg 1\,000 = 3$.

ESIMERKKI 3

Määritä.

a) $\log_4 64$ **b)** $\lg 100\,000$

RATKAISU

a) On määritettävä luvun 64 4-kantainen logaritmi.

Ilmaistaan luku 64 kantaluvun 4 potenssina. Koska $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, niin $\log_4 64 = 3$.

b) On määritettävä luvun 100 000 10-kantainen logaritmi.
Koska $100\,000 = 10^5$, niin $\lg 100\,000 = 5$.

VASTAUS

a) 3 **b)** 5

ESIMERKKI 4

Määritä luku a, kun

a) $\log_5 a = 6$ **b)** $\lg a = 3{,}79$.

RATKAISU

a) On määritettävä luku a, jonka 5-kantainen logaritmi on 6, eli luku, joka ilmaistuna kantaluvun 5 potenssina on 5^6. Siis

$a = 5^6 = 15\,625$.

b) On määritettävä luku a, jonka 10-kantainen logaritmi on 3,79, eli luku, joka ilmaistuna kantaluvun 10 potenssina on $10^{3{,}79}$. Siis

$a = 10^{3{,}79} \approx 6\,166$.

VASTAUS

a) $a = 15\,625$ **b)** $a = 10^{3{,}79} \approx 6\,166$

Logaritmi ja laskin

Symbolisella laskimella voidaan määrittää kaikki logaritmit. Jos logaritmitoimintoon (log) ei näppäillä kantalukua, laskin määrittää 10-kantaisen logaritmin.

Tavallisella laskimella voidaan määrittää 10-kantaisia logaritmeja. Näppäin on log.

Kaikissa laskimissa on lisäksi näppäin ln, jolla voidaan määrittää e-kantaisia logaritmeja. Luku e on niin sanottu Neperin luku, $e \approx 2{,}71828$.

ESIMERKKI 5

a) Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $f(x) = 0{,}23 \lg x + 4{,}5$ arvo kohdassa 8 500.

b) Ratkaise kahden numeron tarkkuudella yhtälö $f(x) = 7{,}4$.

RATKAISU

a) Sijoitetaan $x = 8\,500$.

$f(8\,500) = 0{,}23 \lg 8\,500 + 4{,}5 \approx 5{,}4$ Laskimella.

b) Ratkaistaan yhtälö $0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4$.

Yhtälö voidaan ratkaista symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$0{,}23 \lg x + 4{,}5 = 7{,}4 \quad | -4{,}5$ Yhtälöstä ratkaistaan ensin $\lg x$.

$0{,}23 \lg x = 2{,}9 \quad | : 0{,}23$

$\lg x \approx 12{,}609$ Ilmaistaan x kantaluvun 10 potenssina.

$x \approx 10^{12{,}609} \approx 4{,}1 \cdot 10^{12}$.

VASTAUS

a) 5,4 **b)** $4{,}1 \cdot 10^{12}$

HARJOITUKSIA

Sarja I

249. Määritä luvun 7-kantainen logaritmi.

a) 7^{12} **b)** 49

c) 7 **d)** 1

250. **a)** Määritä lukujen 10 000, 100 ja 0,001 10-kantaiset logaritmit.

b) Määritä luku, jonka 10-kantainen logaritmi on 6, ja luku, jonka 10-kantainen logaritmi on –2.

251. Minkä luvun 5-kantainen logaritmi on

a) 4 **b)** 2

c) 1 **d)** –1?

252. Määritä.

a) $\log_2 2^{11}$ **b)** $\log_2 8$

c) $\log_2 2$

253. Määritä.

a) $\lg 10^9$ **b)** $\lg 10\,000$

c) $\lg 1$ **d)** $\lg 0{,}1$

254. Määritä luku a, kun

a) $\log_3 a = 5$

b) $\log_6 a = 3$.

255. Määritä kolmen numeron tarkkuudella luku a, kun

a) $\log_{10} a = 4{,}79$

b) $\lg a = -1{,}49$.

256. **a)** Laske kahden numeron tarkkuudella funktion $f(x) = 0{,}17 \lg x + 2{,}1$ arvo kohdassa 0,089.

b) Määritä funktion f nollakohta kahden numeron tarkkuudella.

c) Millä muuttujan arvolla funktio f saa arvon 2,9? Anna vastaus kahden numeron tarkkuudella.

257. Valokuvausfilmin herkkyys ilmaistaan kahdella asteikolla. Tyypillinen filmin herkkyyslukema on ISO 125/22°. Ensimmäinen luku 125 on filmin herkkyys fysikaalisella mitta-asteikolla (yksikkönä 1/luksisekunti), jälkimmäinen luku 22° on filmin herkkyys logaritmisella asteikolla.* Logaritmisen asteikon lukema $S°$ saadaan fysikaalisesta lukemasta S kaavalla $S° = 1 + 10 \lg S$. Esimerkiksi herkkyyskuvauksessa ISO 125/22° on $1 + 10 \lg 125 = 21{,}969\ldots \approx 22$.

Täydennä herkkyyskuvaukset

a) ISO 400/– ja ISO 2000/–

b) ISO –/17° ja ISO –/36°.

258. Voimakkaissa maanjäristyksissä vapautuu lyhyessä ajassa suuri määrä maankuoren jännitteisiin patoutunutta energiaa. Maanjäristyksen voimakkuutta ei kuitenkaan ilmaista vapautuneen energian määrällä, vaan maankuoren värähtelyä mittaavalla *richterasteikolla*. Maanjäristyksen voimakkuuden M richtereinä liittää vapautuneen energian määrään E kaava $M = 3{,}2 + 0{,}67 \lg E$. Energian yksikkönä on megawattitunti (MWh).**

---

* Lyhenne ISO ilmaisee, että kyseessä ovat kansainvälisen standardijärjestön (International Standardization Organization) vahvistamat asteikot.

** Tämä likimääräinen kaava on laadittu havaintojen ja geofysikaalisten teorioiden pohjalta.

a) Tammikuussa 1994 tapahtui Los Angelesissa maanjäristys, jonka voimakkuus oli 6,1 richteriä. Laske järistyksessä vapautuneen energian määrä. Loviisan ydinvoimalaitos tuottaa tunnissa 880 MWh energiaa. Kuinka monessa tunnissa ydinvoimalaitos tuottaa saman energiamäärän, joka vapautui Los Angelesissa lyhyessä ajassa?
b) Tapaninpäivänä vuonna 2004 tapahtui Sumatran läheisyydessä merenalainen maanjäristys, jonka voimakkuus oli 9,0 richteriä. Kuinka moninkertainen Sumatran järistyksessä vapautuneen energian määrä oli verrattuna Los Angelesin maanjäristykseen vuonna 1994?

259. Kun metrin korkeudelta hypännyt 70 kilogramman painoinen henkilö tömähtää maahan, maankuoren täräyttämiseen vapautuu energiaa noin 0,15 Wh (osa energiasta vapautuu lämpönä).
a) Mikä on maan tärähdyksen voimakkuus richterasteikolla? Käytä hyväksi edellisen tehtävän tietoja ($1\ \text{MWh} = 10^6\ \text{Wh}$).
b) Kuinka voimakkaasti maa tärähtää, jos 70 kg:n painoisia hyppääjiä on jalkapallokatsomon verran eli 75 000?
c) Maaliskuussa 2011 tapahtui Mäntsälässä 2,7 richterin maanjäristys, joka aiheutti katon halkeamisen ja ikkunoiden helinää. Kuinka monen 70-kiloisen henkilön pitäisi hypätä yhtä aikaa, jotta tärähdyksen voimakkuus olisi 2,7 richteriä?

Sarja II

260. Määritä luvun 6-kantainen logaritmi.
a) 6^7 **b)** 216
c) 6 **d)** 1

261. Määritä luku, jonka 6-kantainen logaritmi on
a) 5 **b)** -4.

262. Määritä luku, jonka 10-kantainen logaritmi on
a) 5 **b)** -3.

263. **a)** Määritä $\log_5 5^{14}$, $\log_5 125$, $\log_5 5$ ja $\log_5 1$.
b) Määritä luku a, kun $\log_5 a = 7$.

264. **a)** Määritä kolmen numeron tarkkuudella $\lg 17$ ja $\lg 0{,}0458$.
b) Määritä kolmen numeron tarkkuudella luku a, kun $\lg a = 4{,}51$.

265. Ratkaise yhtälö kahden numeron tarkkuudella.
a) $\log_{10} x = 0{,}19$
b) $7{,}1 \lg x + 5{,}4 = 0$

266. Laivan bruttovetoisuus (gross tonnage, GT) on laivan tilavuudesta riippuva luku, johon perustuvat muun muassa laivan miehitykselle ja turvallisuusvarustelulle asetetut vaatimukset. Bruttovetoisuus lasketaan kaavalla $GT = K \cdot V$, missä V on laivan tilavuus kuutiometreinä ja $K = 0{,}2 + 0{,}02 \log_{10} V$. Mikä on laivan bruttovetoisuus, jos laivan tilavuus on
a) $10\ 000\ \text{m}^3$
b) $80\ 000\ \text{m}^3$?

267. Maaperän kerrostumien tutkimuksessa, sedimentologiassa, maalajit luokitellaan rakeiden koon mukaan käyttäen niin sanottua Φ-asteikkoa. (Φ on kreikan aakkosten kirjain iso fii.) Maalajin raekoko Φ-asteikolla on $\Phi = -\log_2 d$, missä d on rakeiden läpimitta millimetreinä.

a) Karkeaksi soraksi luokitellaan maalaji, jonka raekoko on 16–32 mm. Mikä on karkean soran raekoko Φ-asteikolla?

b) Maalajia, jonka raekoko Φ-asteikolla on 3–4, kutsutaan hyvin hienoksi hiekaksi. Mikä on hyvin hienon hiekan rakeiden läpimitta?

268. Äänen voimakkuuden fysikaalinen yksikkö on *intensiteetti*: äänen teho pinta-alaa kohden. Intensiteetin yksikkö on $\mathrm{W/m^2}$ (wattia neliömetriä kohti). Intensiteetti vaihtelee huomattavasti: kuiskauksen intensiteetti on noin $10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$, pölynimurin $10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ ja kiviporan $0{,}1\,\mathrm{W/m^2} = 10^{-1}\,\mathrm{W/m^2}$. Mittalukujen suhteet eivät kuitenkaan vastaa kuulohavaintoa, sillä ihmisen aistit tasoittavat ärsykkeiden fysikaalisesti mitattuja suuruussuhteita.* Äänen voimakkuus ilmaistaankin tavallisesti kuulohavaintoa paremmin vastaavana *melutasona*, joka määritellään $L = 120 + 10 \lg I$, missä I on äänen intensiteetti. Melutason L yksikkö on *desibeli* (lyhenne dB). Mikä melutaso on, kun äänen intensiteetti on

a) $10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ (pölynimuri)

b) $0{,}1\,\mathrm{W/m^2}$ (kivipora)

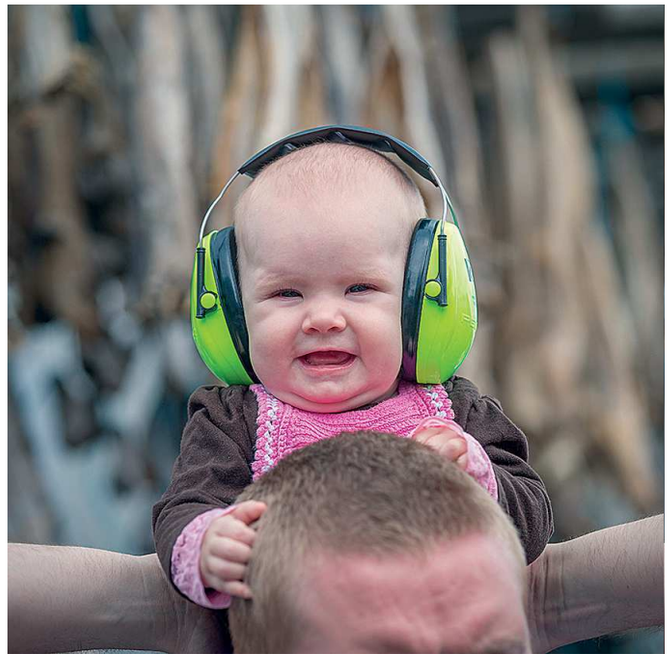
c) $100\,\mathrm{W/m^2}$ (lentokoneen suihkumoottori läheltä kuunneltuna)?

269. **a)** Melutason yksikkö on laadittu niin, että kuulokynnys (pienin melutaso, jonka ihmiskorva kuulee) on noin 0 dB. Mikä on tätä vastaava äänen intensiteetti? Tarvittavat tiedot ovat edellisessä tehtävässä.

b) Koira pystyy kuulemaan ääniä, joiden intensiteetti on $10^{-14}\,\mathrm{W/m^2}$. Mikä vastaava melutaso on?

c) Lentokentän ympäristön ns. lentomelualue on alue, jolle nousevien ja laskeutuvien koneiden ääni kantautuu yli 55 desibelin melutasolla. Mikä tätä rajaa vastaava äänen intensiteetti on?

270. Äänen intensiteetti (yksikkönä $\mathrm{W/m^2}$) on kohtuullisilla etäisyyksillä kääntäen verrannollinen äänenlähteestä mitatun etäisyyden neliöön. Nousevan suihkukoneen äänen melutaso 30 m:n etäisyydellä on 140 dB. Kuinka kaukana koneesta ääni kuuluu rock-konsertin voimakkuudella 120 dB?



* Pölynimurin äänen intensiteetti on tuhatkertainen kuiskaukseen verrattuna ja kiviporan äänen intensiteetti 100 000-kertainen pölynimuriin verrattuna. Suhteet eivät päde koetulle kuuloaistimukselle, sillä ihminen aistii äänet logaritmisella asteikolla. Kyseessä on havaintopsykologian ns. Weber-Fechnerin laki.

Logaritmin sovelluksia

ONGELMA

a) Luvun 125 5-kantainen logaritmi on 3, sillä $125 = 5^3$. Määritä lukujen 125^2 ja 125^4 5-kantaiset logaritmit.
b) Oletetaan, että luvun a k-kantainen logaritmi on 4 eli $a = k^4$. Ilmaise luvut a^2 ja a^3 kantaluvun k potensseina ja päättele lukujen k-kantaiset logaritmit.

Monet logaritmin sovellukset perustuvat seuraavaan logaritmin ominaisuuteen.

Potenssin logaritmikaava

$$\log_k a^s = s \cdot \log_k a$$

Kaavan mukaan potenssin a^s logaritmi on luvun a logaritmi kerrottuna eksponentilla s.

Kaavan perustelu. Oletetaan, että luvun a k-kantainen logaritmi on r eli

$$\log_k a = r.$$

Luvun a k-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun a ilmaistaan kantaluvun k potenssina, joten

$$a = k^r.$$

Tällöin

$$a^s = (k^r)^s = k^{rs}.$$

Potenssin potenssin eksponentti on eksponenttien tulo.

Luku a^s on ilmaistu k:n potenssina. Eksponentin arvo on rs. Siis

$$\log_k a^s = rs = s \cdot \log_k a.$$

$r = \log_k a$

ESIMERKKI 1 Kumpi luvuista 2^{4151} ja 3^{2621} on suurempi?

RATKAISU Potenssien arvot ovat niin suuret, että potensseja ei voida laskea laskimen potenssinäppäimellä. Koska suuremman luvun 10-kantainen logaritmi on suurempi, voidaan verrata lukujen 10-kantaisia logaritmeja.

$$\lg 2^{4151} = 4151 \cdot \lg 2 \qquad \text{Potenssin logaritmikaava } \lg a^s = s \lg a.$$

$$\approx 1249{,}6$$

ja

$$\lg 3^{2621} = 2621 \cdot \lg 3$$

$$\approx 1250{,}5$$

Luvun 3^{2621} 10-kantainen logaritmi on suurempi kuin luvun 2^{4151}. Siis luku 3^{2621} on suurempi.*

VASTAUS 3^{2621}

* Kreikan kielen sanoista *logos* (sana, suhde) ja *aritmos* (luku) muodostettu sana logaritmi voitaisiin suomentaa sanalla laskuluku. Logaritmit keksittiin 1600-luvulla apuvälineiksi hankalien numerolaskujen suorittamiseen, esimerkiksi suurten lukujen tutkimiseen tämän esimerkin tapaan. Ennen elektronisten laskimien aikaa myös lukujen kerto- ja jakolaskussa ja juurten määrittämisessä käytettiin apuna logaritmeja. Vielä 1970-luvulla jokaisella lukiolaisella oli oma logaritmitaulukkokirja, josta luettiin lukujen logaritmeja.

ESIMERKKI 2 Määritä yhtälön $3^x = 5$ ratkaisu kolmen numeron tarkkuudella.

RATKAISU Yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä 10-kantaista logaritmia ja potenssin logaritmikaavaa.

$3^x = 5$ Vasemman ja oikean puolen logaritmit ovat yhtä suuret.

$\lg 3^x = \lg 5$ Potenssin logaritmikaava $\lg a^s = s \lg a$.

$x \cdot \lg 3 = \lg 5 \quad | : \lg 3$ Ratkaistaan x.

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3} \approx 1{,}46$$

VASTAUS 1,46

Yhtälössä $k^x = a$ tuntematon on eksponenttina. Yhtälöä sanotaan *eksponenttiyhtälöksi*.

Eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaiseminen

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$ ratkaistaan merkitsemällä yhtälön molempien puolien logaritmit yhtä suuriksi ja käyttämällä potenssin logaritmikaavaa. Kun käytetään 10-kantaista logaritmia, ratkaisulle voidaan laskea likiarvo kaikilla laskimilla.

$k^x = a$

$\lg k^x = \lg a$ Potenssin logaritmikaava.

$x \cdot \lg k = \lg a \quad | : \lg k$

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}$$

Kun yhtälö $k^x = a$ ratkaistaan symbolisen laskimen yhtälönratkaisutoiminnolla (solve), laskin ilmaisee ratkaisun tarkan arvon muodossa $x = \frac{\ln a}{\ln k}$. Laskin käyttää ratkaisussa e-kantaista logaritmia.

ESIMERKKI 3

Sijoituskohteeseen, jonka vuotuiseksi tuotoksi luvataan 5 %, sijoitetaan 4 000 euroa. Kuinka monen kokonaisen vuoden kuluttua sijoituksen arvo ylittää 7 000 euroa?

RATKAISU

Koska $100\,\% + 5\,\% = 105\,\% = 1{,}05$, sijoituksen arvo tulee joka vuosi 1,05-kertaiseksi. Talletuksen arvo x vuoden kuluttua on $1{,}05^x \cdot 4\,000$ euroa. Arvon tulee olla 7 000 euroa. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$1{,}05^x \cdot 4\,000 = 7\,000$$

$$x \approx 11{,}47$$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$$1{,}05^x \cdot 4\,000 = 7\,000 \quad | : 4\,000$$

$$1{,}05^x = 1{,}75$$

$$\lg 1{,}05^x = \lg 1{,}75$$ Käytetään potenssin logaritmikaavaa.

$$x \cdot \lg 1{,}05 = \lg 1{,}75 \quad | : \lg 1{,}05$$

$$x = \frac{\lg 1{,}75}{\lg 1{,}05} \approx 11{,}47.$$

Sijoituksen arvo on yli 7 000 euroa 12 vuoden kuluttua.

VASTAUS

12 vuoden kuluttua

ESIMERKKI 4

Eräälle Tyynenmeren saarelle levisi ydinkokeen yhteydessä radioaktiivista ainetta strontium-90. Strontiumpitoisuus saarella on noin satakertainen turvalliseen määrään verrattuna. Aineesta hajoaa vuodessa 2,5 %. Kuinka monen vuoden kuluttua saarella voidaan taas asua?

RATKAISU

Koska $100\,\% - 2{,}5\,\% = 97{,}5\,\% = 0{,}975$, strontiumin massa tulee joka vuosi 0,975-kertaiseksi. Jos aineen määrä kokeen jälkeen on a, niin x vuoden kuluttua määrä on $0{,}975^x \cdot a$.

Turvallinen määrä on sadasosa alkuperäisestä määrästä a eli $0{,}01a$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$0{,}975^x \cdot a = 0{,}01a$$

$$x \approx 180$$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$$0{,}975^x \cdot a = 0{,}01a \quad | : a$$ Vakio a jaetaan heti pois.

$$0{,}975^x = 0{,}01$$

$$\lg 0{,}975^x = \lg 0{,}01$$ Käytetään potenssin logaritmikaavaa.

$$x \cdot \lg 0{,}975 = \lg 0{,}01 \quad | : \lg 0{,}975$$

$$x = \frac{\lg\ 0{,}01}{\lg\ 0{,}975} \approx 180.$$

Strontiumin määrä on vähentynyt turvalliselle tasolle noin 180 vuoden kuluttua.

VASTAUS

180 vuoden kuluttua

ESIMERKKI 5

Irlannin väkiluku vuoden 2013 alussa oli 4,8 miljoonaa ja väkiluku kasvoi 1,1 % vuodessa. Suomen väkiluku samaan aikaan oli 5,4 miljoonaa ja kasvu 0,37 % vuodessa. Ennusta näiden tietojen perusteella vuosi, jona Irlannin väkiluku ylittää Suomen väkiluvun.

RATKAISU

Irlannin väkiluku 1,011-kertaistuu joka vuosi. Kun vuoden 2013 alusta on kulunut x vuotta, väkiluku on $1{,}011^x \cdot 4{,}8$ miljoonaa. Vastaavasti Suomen väkiluku 1,0037-kertaistuu vuosittain ja x vuoden kuluttua väkiluku on $1{,}0037^x \cdot 5{,}4$ miljoonaa. Ratkaistaan, milloin väkiluvut ovat yhtä suuret.

$$1{,}011^x \cdot 4{,}8 = 1{,}0037^x \cdot 5{,}4$$

$$x \approx 16{,}3$$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$$1{,}011^x \cdot 4{,}8 = 1{,}0037^x \cdot 5{,}4 \quad | : 4{,}8$$

$$1{,}011^x = 1{,}0037^x \cdot 1{,}125 \quad | : 1{,}0037^x$$

Tavoitteena on saattaa yhtälö muotoon $k^x = a$.

$$\frac{1{,}011^x}{1{,}0037^x} = 1{,}125$$

Käytetään osamäärän potenssin kaavaa $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

$$\left(\frac{1{,}011}{1{,}0037}\right)^x = 1{,}125$$

Lasketaan kantaluvun likiarvo.

$$1{,}00727^x = 1{,}125$$

$$\lg 1{,}00727^x = \lg 1{,}125$$

$$x \cdot \lg 1{,}00727 = \lg 1{,}125 \quad | : \lg 1{,}00727$$

$$x = \frac{\lg 1{,}125}{\lg 1{,}00727} \approx 16{,}3.$$

Saatiin ennuste, jonka mukaan Irlannin väkiluku ylittää Suomen väkiluvun 16,3 vuoden kuluttua vuoden 2013 alusta eli vuoden $2013 + 16 = 2029$ aikana.

VASTAUS

vuonna 2029

HARJOITUKSIA

Sarja I

271. Kumpi luvuista 10^{1310} ja 12^{1210} on suurempi?

272. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $3^x = 6$ **b)** $0{,}7^x = 0{,}01$

273. Lasketaan luvun 3 potensseja $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ jne. Ratkaise eksponenttiyhtälön avulla, mikä on ensimmäinen potenssi, jonka arvo ylittää 10 000 000.

274. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $1{,}4^x \cdot 150 = 750$

b) $0{,}87^x \cdot 12 = 1{,}5$

275. Pankkitilille, jonka todellinen vuotuinen korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on 2,88 %, talletetaan 5 000 euroa. Kuinka monessa vuodessa talletuksen arvo ylittää 8 000 euroa?

276. Paraguayn väkiluku vuoden 2012 alussa oli 6,5 miljoonaa ja väkiluku kasvoi vuosittain 1,8 %. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, niin minä vuonna Paraguayn väkiluku ylittää 10 miljoonan rajan?

277. Kopiokone pienentää kuvion mitat 0,71-kertaisiksi. Kuvion korkeus on 28 cm. Kuinka monella kopioinnilla korkeus saadaan pienemmäksi kuin 1,0 cm?

278. Jos liikenneonnettomuuksissa loukkaantuneiden lukumäärää onnistuttaisiin joka vuosi vähentämään 5 %, niin kuinka monessa vuodessa loukkaantuneiden määrä vähenisi alle puoleen nykyisestä?

279. Radioaktiivisesta aineesta cesium-137 hajoaa 2,3 % vuodessa. Voimalaonnettomuuden saastuttamalla alueella aineen määrä ylittää kymmenkertaisesti turvallisuusrajan. Kuinka monen vuoden kuluttua aineen määrä on sallituissa rajoissa?

280. Suodatin, jonka paksuus on 1,0 cm, pidättää 65 % ilmassa olevista tiettyä kokoa suuremmista pölyhiukkasista. Kuinka paksu samasta aineesta valmistetun suodattimen tulee olla, jotta se pidättäisi pölyhiukkasista 99,9 %?

281. Vuoden 1900 alussa laboratorioon hankittiin 50,0 mg radiumin vaarallista radioaktiivista isotooppia radium-226. Aineesta hajoaa 0,043 % vuodessa.

a) Kuinka paljon ainetta oli jäljellä vuonna 2012?

b) Minä vuonna aineen määrä alittaa 45,0 mg?

282. Tilille, jonka todellinen vuotuinen korkotuotto on 1,20 %, talletettiin 7 000 euroa. Toiselle tilille, jonka todellinen korkotuotto on 1,85 %, talletettiin samaan aikaan 5 000 euroa. Kuinka monessa vuodessa alun perin pienempi talletus kasvaa suuremmaksi?

Sarja II

283. Määritä kokonaislukujen 5^{2002}, 3^{3002} ja 2^{4002} suuruusjärjestys.

284. Ratkaise yhtälö kahden numeron tarkkuudella.

a) $2^x = 500$ **b)** $0{,}99^x = 0{,}01$

285. Ratkaise yhtälö kahden numeron tarkkuudella.

a) $5{,}3 \cdot 0{,}85^x = 1{,}0$

b) $6{,}2 \cdot 1{,}05^x = 9{,}7$

286. Kopiokone suurentaa kuvion mittoja 20 %. Kuinka monella kopioinnilla 2,3 cm korkea kirjain saadaan yli 18,0 cm:n korkuiseksi?

287. Suomen väkiluku vuoden 2013 alussa oli 5,4 miljoonaa ja kasvu 0,37 % vuodessa. Jos kasvunopeus säilyy samana, niin minkä vuoden aikana Suomen väkiluku ylittää 6 miljoonaa?

288. Kuinka monessa vuodessa sijoitettu pääoma kasvaa yli kaksinkertaiseksi, jos sijoitus tuottaa vuodessa korkoa

a) 4 % **b)** 10 %?

289. Jos vanhustenhoitopaikkojen lukumäärää lisätään vuosittain 3,0 %, niin kuinka monessa vuodessa hoitopaikkojen määrä lisääntyy 50 %?

290. Missä ajassa radioaktiivisen aineen määrä vähenee puoleen, jos aineesta hajoaa

a) 2,0 % vuorokaudessa

b) 0,0030 % vuodessa?

291. Järveen on levinnyt ympäristömyrkkyä määrä, joka ylittää turvallisen rajan 20-kertaisesti. Myrkky on sekoittunut veteen tasaisesti. Järven vedestä vaihtuu viikossa 15 %. Kuinka monessa viikossa vesi tulee käyttökelpoiseksi?

292. Yhden desimetrin paksuinen kerros järven vettä pidättää 5,0 % siihen tulleesta valosta.

a) Kuinka monta prosenttia veteen tulleesta valosta on jäljellä järven pohjassa 7,3 metrin syvyydessä?

b) Kuinka syvällä voidaan valokuvata, jos tarvittava valaistus on 15 % veteen tulleesta valosta?

293. Intian ennakoidaan jo lähiaikoina kasvavan maapallon väkirikkaimmaksi valtioksi. Vuoden 2013 alussa Intian väkiluku oli 1,27 miljardia ja vuotuinen väestönkasvu 1,37 %. Samaan aikaan Kiinan väkiluku oli 1,36 miljardia ja vuotuinen kasvunopeus 0,56 %. Ennusta näiden lukujen avulla vuosi, jonka aikana Intian väkiluku ylittää Kiinan väkiluvun.

5 Korkeammat juuret ja potenssiyhtälö

ONGELMA

a) Laske lukujen 5 ja -5 neljäs potenssi. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^4 = 625$?

b) Laske lukujen 3 ja -3 viides potenssi. Mitkä luvut toteuttavat yhtälön $x^5 = 243$?

JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Ratkaise yhtälö. Tarkista.

a) $x^2 = 529$ **b)** $x^3 = 343$ **c)** $x^4 = 1\,296$

RATKAISU

a) Yhtälön $x^2 = 529$ juuret ovat luvun 529 neliöjuuri ja neliöjuuren vastaluku.

$x^2 = 529$

$x = \sqrt{529} = 23$ tai $x = -\sqrt{529} = -23$

Tarkistus: $23^2 = 529$ ja $(-23)^2 = 529$.

b) Yhtälön $x^3 = 343$ juuri on luvun 343 kuutiojuuri. Koska negatiivisten lukujen kolmas potenssi on negatiivinen, yhtälöllä ei ole muita juuria.

Luvun a kuutiojuuri merkitään $\sqrt[3]{a}$.

$x^3 = 343$

$x = \sqrt[3]{343} = 7$

Kuutiojuuren arvo saadaan laskimella.

Tarkistus: $7^3 = 343$.

c) Yhtälön $x^4 = 1\,296$ positiivinen juuri on luvun $1\,296$ neljäs juuri. Koska luvun ja luvun vastaluvun neljännet potenssit ovat yhtä suuret, yhtälön toinen juuri on neljännen juuren vastaluku.

Luvun a neljäs juuri merkitään $\sqrt[4]{a}$.

$x^4 = 1\,296$

$x = \sqrt[4]{1\,296} = 6$ tai $x = -\sqrt[4]{1\,296} = -6$

Neljännen juuren arvo saadaan laskimella.

Tarkistus: $6^4 = 1\,296$ ja $(-6)^4 = 1\,296$.

VASTAUS **a)** $x = 23$ tai $x = -23$ **b)** $x = 7$ **c)** $x = 6$ tai $x = -6$

Potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaisujen olemassaolo ja lukumäärä riippuu siitä, onko eksponentti n parillinen vai pariton. Riippuvuuden selittää potenssin merkkisääntö:

Luvun parillinen potenssi on aina joko positiivinen tai nolla.
Luvun pariton potenssi on aina samanmerkkinen kuin potenssiin korotettu luku.

Korkeammat juuret ja potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen

Käsitellään erikseen tapaukset, joissa n on parillinen ja n on pariton.

n pariton

Jos n on pariton, niin yhtälöllä $x^n = a$ on aina ratkaisu. Ratkaisu on *luvun a n. juuri*, ja se merkitään $\sqrt[n]{a}$.

$x^n = a$

$x = \sqrt[n]{a}$

n parillinen

Jos n on parillinen, niin yhtälöllä $x^n = a$ on ratkaisu, jos a on positiivinen tai nolla. Ratkaisu, joka on positiivinen tai nolla, on *luvun a n. juuri*, ja se merkitään $\sqrt[n]{a}$. Myös n. juuren vastaluku toteuttaa yhtälön.

$x^n = a$

$x = \sqrt[n]{a}$ tai $x = -\sqrt[n]{a}$

Korkeammat juuret ja laskin

Kaikki juuret voidaan laskea laskimella. Näppäin on $\sqrt[x]{y}$ tai vastaava.

Symbolinen laskin saattaa näyttää korkeampien juurten tarkat arvot käyttäen murtopotenssimerkintää $a^{\frac{1}{n}}$.

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Siis luvun a n. juuri on yhtä suuri kuin luvun a potenssi, jonka eksponentti on $\frac{1}{n}$.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $x^{12} = 200$ **b)** $45{,}1x^7 = 2{,}7$

RATKAISU

a) $x^{12} = 200$

$x \approx -1{,}56$ tai $x \approx 1{,}56$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$x^{12} = 200$ Yhtälön ratkaisut ovat luvun 200 12. juuri ja juuren vastaluku.

$x = \sqrt[12]{200} \approx 1{,}56$ tai $x = -\sqrt[12]{200} \approx -1{,}56$.

b) $45{,}1x^7 = 2{,}7$

$x \approx 0{,}669$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$45{,}1x^7 = 2{,}7 \quad | : 45{,}1$ Ratkaistaan ensin x^7.

$x^7 = \frac{2{,}7}{45{,}1}$ Yhtälön ratkaisu on luvun $\frac{2{,}7}{45{,}1}$ seitsemäs juuri. Voidaan myös käyttää likiarvoa $\frac{2{,}7}{45{,}1} \approx 0{,}05987$.

$x = \sqrt[7]{\frac{2{,}7}{45{,}1}} \approx 0{,}669.$

VASTAUS

a) $x \approx 1{,}56$ tai $x \approx -1{,}56$ **b)** $x \approx 0{,}669$

ESIMERKKI 3

Pankkitilille talletetaan 25 000 euroa kahdeksaksi vuodeksi. Kuinka suuri tilin vuotuisen koron tulee olla, jotta talletusajan kuluttua tilillä olisi 30 000 euroa?

RATKAISU

Kun korko vuosittain lisätään pääomaan, talletuksen arvo tulee aina kerrotuksi samalla korkokertoimella k. Kun on kulunut kahdeksan vuotta, talletuksen arvo on $k^8 \cdot 25\,000$ euroa.

Tilillä on tällöin oltava 30 000 euroa. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$k^8 \cdot 25\,000 = 30\,000$

Ratkaistaan symbolisella laskimella tai saattamalla yhtälö ensin muotoon $k^8 = \frac{30\,000}{25\,000}$.

$k \approx -1{,}0231$ tai $k \approx 1{,}0231$

Vain positiivinen ratkaisu voi olla korkokerroin.

Talletuksen on tultava 1,0231-kertaiseksi joka vuosi. Tilin koron on oltava 2,31 %.

VASTAUS

2,31 %

HARJOITUKSIA

Sarja I

294. Merkitse ja määritä juuri. Tarkista korottamalla potenssiin.

a) luvun 2 187 seitsemäs juuri

b) luvun 4 096 kuudes juuri

c) luvun −2 744 kuutiojuuri

295. Määritä juuren likiarvo kolmen numeron tarkkuudella.

a) $\sqrt[3]{9}$ **b)** $\sqrt[14]{130}$

296. On valmistettava kuution muotoinen mitta-astia, jonka vetoisuus on 10 litraa. Kuinka pitkiä astian särmien tulee olla?

297. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.

a) $x^4 = 5$ **b)** $3x^5 = 63$

c) $x^{10} \cdot 16 = 500$

298. Nisäkkään verenkiertoaika eli aika, jonka kuluttua sydämestä lähtenyt veri palaa sydämeen, on likimain suoraan verrannollinen eläimen massan neljänteen juureen. 70 kg painavan ihmisen verenkiertoaika on noin 50 sekuntia. Mikä 5 200 kg painavan norsun verenkiertoaika on?

299. Pankkitalletus kasvoi kuudessa vuodessa 4 500 eurosta 5 400 euroon. Mikä tilin vuosikorko oli?

300. Kaupungin asukasluku kasvoi kymmenessä vuodessa 12 000 asukkaasta 15 000 asukkaaseen. Oletetaan, että vuotuinen väestönkasvuprosentti säilyi koko ajanjakson samana. Kuinka monta prosenttia asukasluku kasvoi vuosittain?

301. Kaupungin henkilöstön sairauspoissaolopäivien määrä vuonna 2012 oli 8 912. Tällöin päätettiin työhyvinvointiohjelmasta, jonka tavoitteena oli vähentää sairauspoissaolojen määrä neljässä vuodessa 6 000:een. Jos määrää vähennetään joka vuosi yhtä monta prosenttia, niin kuinka monta prosenttia vuotuisen vähennyksen tulee olla?

302. Palkkoja suunnitellaan korotettavan joka vuosi yhtä monta prosenttia niin, että palkat nousevat viidessä vuodessa 30 %. Mikä vuotuinen palkankorotusprosentti on?

303. Teollisuuslaitoksen rikkipäästöjä halutaan kymmenessä vuodessa vähentää 90 %. Mikä tulee asettaa vuotuiseksi vähentämistavoitteeksi?

304. Ote lehtiartikkelista: ”Teollisuuden työntekijöiden palkat nousivat 1980-luvulla 140 %. Keskimäärin siis 9,1 % vuodessa.”

a) Kuinka luku 9,1 % on laskettu? Perustele sanan ”keskimäärin” käyttö.

b) Samalla vuosikymmenellä elinkustannukset (elinkustannusindeksillä mitattuna) kasvoivat 92 %. Kuinka suuri elinkustannusten keskimääräinen vuotuinen kasvu oli?

305. Aurinkokunnastamme on löydetty kymmeniätuhansia Aurinkoa kiertäviä pikkuplaneettoja eli asteroideja. Havaitun planeetan etäisyys Auringosta voidaan laskea määrittämällä aika, jossa planeetta kiertää Auringon ympäri, sillä Keplerin lain mukaan kiertoajan neliö on suoraan verrannollinen planeetan Auringosta mitatun etäisyyden kuutioon. Pikkuplaneetta Marjaleena (yksi 214:stä suomalaisnimisestä pikkuplaneetasta) kiertää Auringon 5,22:ssa Maan vuodessa. Mikä on Marjaleenan etäisyys Auringosta? Maan keskietäisyys Auringosta on $1{,}50 \cdot 10^8$ km.

Sarja II

306. Merkitse ja määritä juuri. Tarkista korottamalla potenssiin.
a) luvun 512 yhdeksäs juuri
b) luvun 100 000 000 neljäs juuri
c) luvun 1 024 neliöjuuri

307. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.
a) $x^7 = 2\,000$ **b)** $24x^{42} = 9$

308. Kuution muotoisen mitta-astian tilavuus on 2 dl. Kuinka pitkät astian särmät ovat?

309. Erään matemaattisen mallin mukaan ekologisen alueen (metsän, saaren tms.) lajimäärä on suoraan verrannollinen alueen koon neljänteen juureen. Oletetaan, että 1 200 hehtaarin suuruinen kaupungin ympäröimä metsä hävitetään teiden ja rakennusten alle niin, että jäljelle jää 300 hehtaaria. Kuinka monta prosenttia vähenee metsässä elävien lajien määrä?

310. Tuulivoimalasta saatava teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden kuutioon. Kun tuulen nopeus oli 2,6 m/s, pienen mökkivoimalan teho piti juuri ja juuri kirkkaana yhden 75 watin sähkölampun. Kuinka kovaa pitäisi tuulla, jotta voimalasta saataisiin sähkökiukaan vaatima 5 000 watin teho?

311. Kuinka suuri tulee sijoituksen tuottaman vuotuisen koron olla, jotta 10 000 euron sijoitus kasvaisi viidessä vuodessa vähintään 15 000 euroon?

312. Taulun arvo nousi kahdeksassa vuodessa 1 300 eurosta 2 800 euroon. Kuinka monta prosenttia keskimääräinen vuotuinen arvonnousu oli?

313. Yritystä saneerattiin vähentämällä henkilöstön määrä neljässä vuodessa 5 120:stä 3 920:een. Vähennys oli joka vuosi yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia henkilöstöstä vähennettiin vuosittain?

314. Tasaisen inflaation aikana hinnat nousivat neljässä vuodessa 20 %. Mikä vuotuinen inflaatioprosentti oli?

315. Koulussa halutaan vähentää valokopioiden määrää kolmessa vuodessa 40 %. Kuinka monta prosenttia tulee vuotuisen vähentämistavoitteen olla?

316. Viitenä peräkkäisenä vuotena hinnat nousivat 16,2 %, 11,0 %, 9,4 %, 4,1 % ja 2,6 %.
a) Kuinka monta prosenttia hinnat nousivat koko ajanjaksona?
b) Mikä oli ajanjakson keskimääräinen vuotuinen inflaatioprosentti?

Eksponentiaalisen mallin sovelluksia

ESIMERKKI 1

Yrityksen liikevaihto halutaan kaksinkertaistaa kuudessa vuodessa.
a) Kuinka suureksi vuotuinen kasvutavoite tulee asettaa?
b) Jos kasvu jatkuu samanlaisena, niin kuinka monessa vuodessa liikevaihto kolminkertaistuu?

RATKAISU

a) Olkoon liikevaihdon suuruus nyt a. Jos liikevaihto tulee vuosittain k-kertaiseksi, niin kuuden vuoden kuluttua liikevaihto on $k^6 \cdot a$.

Halutaan, että liikevaihto kuuden vuoden kuluttua on kaksinkertainen eli $2a$.

$k^6 \cdot a = 2a \quad | : a$ a jaetaan heti pois.

$k^6 = 2$ Ratkaistaan symbolisella laskimella tai potenssiyhtälön ratkaisumenetelmällä.

$k \approx -1{,}12$ tai $k \approx 1{,}12$

Vain positiivinen juuri voi olla kasvukerroin.

Liikevaihdon tulee vuosittain $1{,}12$-kertaistua eli kasvaa $12\ \%$.

b) Jos kasvu jatkuu samanlaisena, liikevaihto x vuoden kuluttua on $1{,}12^x\, a$.

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua liikevaihto on kolminkertainen eli $3a$.

$1{,}12^x\, a = 3a \quad | : a$

$1{,}12^x = 3$ Ratkaistaan symbolisella laskimella tai eksponenttiyhtälön ratkaisumenetelmällä.

$x \approx 9{,}7$

Liikevaihto kolminkertaistuu kymmenessä vuodessa.

VASTAUS

a) $12\ \%$:n vuotuinen kasvu **b)** kymmenessä vuodessa

ESIMERKKI 2

Radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus ilmaistaan usein *puoliintumisaikana*. Puoliintumisaika on aika, jossa puolet aineesta muuttuu muiksi aineiksi. Strontiumin isotoopin strontium-90 puoliintumisaika on 29 vuotta.

a) Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa vuodessa?

b) Kuinka paljon 1,6 kg:sta strontium-90:ää on jäljellä 53 vuoden kuluttua?

RATKAISU

a) Olkoon massan suuruus alussa a. Aineesta hajoaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, eli massa tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Kun on kulunut 29 vuotta, massa on $k^{29} \cdot a$.

Aineesta on 29 vuoden kuluttua jäljellä puolet eli $0{,}5a$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$k^{29} \cdot a = 0{,}5a \quad | : a$ — a jaetaan heti pois.

$k^{29} = 0{,}5$ — Ratkaistaan symbolisella laskimella tai määrittämällä luvun 0,5 29. juuri.

$k \approx 0{,}97638$

Aineen massa tulee joka vuosi 0,97638-kertaiseksi. Vuodessa aineesta hajoaa $100\,\% - 97{,}638\,\% \approx 2{,}4\,\%$.*

b) Aineen massa tulee joka vuosi 0,97638-kertaiseksi. Jos massa nyt on 1,6 kg, niin 53 vuoden kuluttua massa on $0{,}97638^{53} \cdot 1{,}6\text{ kg} \approx 0{,}45\text{ kg}$.

VASTAUS

a) 2,4 % **b)** 0,45 kg

* a-kohdan vastaus pyöristettiin lähtötiedon (29 vuotta) mukaiseen kahden numeron tarkkuuteen. Kertoimelle k laskettiin tarkempi likiarvo b-kohtaa varten.

ESIMERKKI 3

Veijon valmistamien korvakorujen päivämyynti oli 80 kpl vuoden 2008 alussa ja 140 kpl vuoden 2012 alussa. Ennusta päivämyynti vuoden 2020 alussa olettaen, että

a) myynti kasvaa joka vuosi yhtä monta kappaletta (lineaarinen malli)

b) myynti kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia (eksponentiaalinen malli).

RATKAISU

a) Neljän vuoden aikana päivämyynti on kasvanut 60 kappaletta. Jos päivämyynti kasvaa joka vuosi yhtä monta kappaletta, niin kasvu on $\frac{60}{4} = 15$ kappaletta vuodessa. Kun vuodesta 2008 on kulunut x vuotta, päivämyynti on $80 + 15x$. Vuonna 2020 päivämyynti on $80 + 15 \cdot 12 = 260$.

Ennustamiseen käytettiin lineaarista mallia. Funktio $f(x) = 80 + 15x$ on ensimmäisen asteen funktio, jonka kuvaaja on suora $y = 80 + 15x$.

b) Jos päivämyynti kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia, niin päivämyynti tulee joka vuosi kerrotuksi samalla luvulla k. Kun vuodesta 2008 on kulunut neljä vuotta, päivämyynti on $k^4 \cdot 80$.

Päivämyynnin suuruus vuonna 2012 on 140. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$k^4 \cdot 80 = 140$

Ratkaistaan symbolisella laskimella tai saattamalla yhtälö ensin muotoon $k^4 = \frac{140}{80}$.

$k \approx -1{,}1502$ tai $k \approx 1{,}1502$

Kun vuodesta 2008 on kulunut x vuotta, päivämyynti on $1{,}1502^x \cdot 80$. Vuonna 2020 päivämyynti on $1{,}1502^{12} \cdot 80 \approx 430$.

Ennustamiseen käytettiin eksponentiaalista mallia.
Funktio $g(x) = 1{,}1502^x \cdot 80$ on eksponenttifunktio.

VASTAUS

a) 260 **b)** 430

HARJOITUKSIA

Sarja I

317. Yrityksen liikevaihto vuonna 2008 oli 16 miljoonaa euroa ja vuonna 2012 24 miljoonaa euroa. Kasvu oli tasaista niin, että liikevaihto kasvoi joka vuosi yhtä monta prosenttia.
a) Kuinka monta prosenttia liikevaihto vuosittain kasvoi?
b) Minä vuonna liikevaihto ylittää 100 miljoonaa euroa, jos kasvu jatkuu samanlaisena?

318. Vuoden 1997 alussa Afrikan väkiluku oli 758 miljoonaa ja vuoden 2004 alussa 885 miljoonaa. Näiden lukujen perusteella ennustettiin vuosi, jonka aikana Afrikan väkiluku ylittää miljardin rajan. Mikä ennuste oli?

319. Nykyisellä kasvuvauhdilla Nigerin väestö kaksinkertaistuu 19 vuodessa. Jos kasvuvauhti jatkuu samanlaisena, niin kuinka moninkertaiseksi väkiluku kasvaa sadassa vuodessa?

320. Radonin isotoopin radon-225 puoliintumisaika on 15 vuorokautta. Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa
a) yhdessä vuorokaudessa
b) neljässä vuorokaudessa?
c) Kuinka monessa vuorokaudessa aineesta hajoaa 99 %?

321. Transistorien lukumäärä mikropiireissä on viime vuosikymmeninä kasvanut eksponentiaalisesti. Vuonna 1971 tehokkaimmissa mikropiireissä oli 2 300 transistoria, ja vuonna 2011 lukumäärä oli 2 600 000 000. Kuinka monta prosenttia mikropiirien määrä on kasvanut vuosittain? Pitääkö paikkansa niin sanottu Mooren laki, jonka mukaan transistorien lukumäärä kaksinkertaistuu noin kahden vuoden välein?

322. Väinö oli laskenut, että vuonna 2007 häneltä kului päivässä edestakaiseen työmatkaan keskimäärin 42 minuuttia ja vuonna 2012 keskimäärin 58 minuuttia. Hän laski ennusteen päivittäiseen työmatkaan vuonna 2023 kuluvalle ajalle käyttämällä
a) lineaarista mallia
b) eksponentiaalista mallia.
Mitkä ennusteet olivat?

323. Aineenvaihdunnan takia kaikki eliöt (kasvit ja eläimet) sisältävät samassa suhteessa hiilen eri isotooppeja kuin ilmakehä. Eliön kuoltua radioaktiivisen isotoopin, hiili-14:n, määrä alkaa vähetä. Hiili-14:n puoliintumisaika on 5 568 vuotta.
a) Kuinka monta prosenttia hiili-14:ää on jäljellä 16 000 vuotta sitten eläneen mammutin luissa?
b) Hiili-14-pitoisuutta käytetään historiallisten löytöjen ajoitukseen eli ns. radiohiiliajoitukseen. Egyptiläisestä pyramidista vuonna 1975 löydetyssä muumiossa oli jäljellä 65 % hiili-14:ää. Miltä ajalta muumio on peräisin?

Sarja II

324. Maapallon väkiluku ylitti kolme miljardia vuonna 1960 ja neljä miljardia vuonna 1974. Mikä olisi maapallon väkiluku ollut vuonna 2012, jos kasvu olisi jatkunut samanlaisena?

325. Arvioidaan, että nykyisen kasvuvauhdin jatkuessa kaupungin asukasluku kaksinkertaistuu neljässäkymmenessä vuodessa.
a) Kuinka monta prosenttia asukasluku kasvaa yhdessä vuodessa?
b) Kuinka monessa vuodessa asukasluku kasvaa 50 %?

326. Vedenpuhdistuslaitteeseen asennetaan peräkkäin kahdeksan samanlaista suodatinta. Halutaan, että laite poistaa 99 % vedessä olevasta hiekasta. Kuinka monta prosenttia suodattimeen tulevasta hiekasta yhden suodattimen tulee poistaa?

327. Arvioidaan, että vastasyntyneen paino kaksinkertaistuu viiden ensimmäisen elinkuukauden aikana. Oletetaan, että kasvu tänä aikana on eksponentiaalista. Kuinka paljon tämän mallin mukaan painaa kahden kuukauden ikäinen vauva, jonka syntymäpaino oli 4 330 g? Kuinka vanhana hän painaisi 120 kg, jos painon kasvu jatkuisi yhtä nopeana?

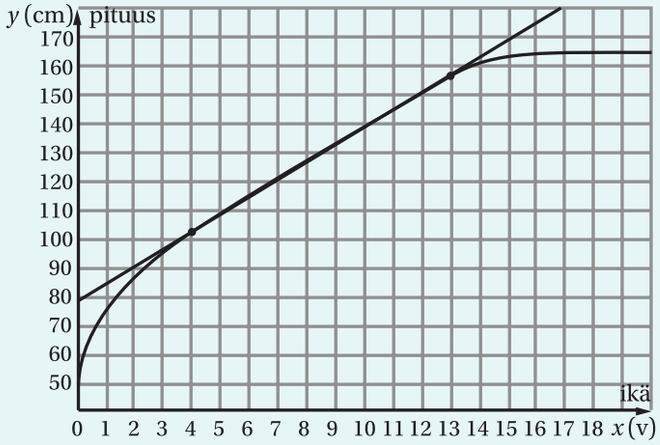
328. Alkoholinkulutusta halutaan viidessä vuodessa vähentää 20 %.
a) Mikä tulee asettaa vuotuiseksi vähenemistavoitteeksi?
b) Jos väheneminen jatkuu samanlaisena, niin kuinka monessa vuodessa alkoholinkulutus vähenee puoleen?

329. Ydinvoimalaonnettomuudessa levisi ympäristöön radioaktiivista ainetta jodi-131, jonka puoliintumisaika on 8,0 vuorokautta. Laitumen ruohossa aineen määrä oli onnettomuuden jälkeen 50-kertainen turvalliseen rajaan verrattuna. Kuinka pian lehmät voidaan päästää laitumelle?

330. Vilman ruokablogilla oli tammikuussa 2009 keskimäärin 350 päivittäistä lukijaa. Tammikuussa 2013 lukijoiden määrä oli 3 200. Ennusta päivittäisten lukijoiden määrä tammikuussa 2020 käyttämällä
a) lineaarista mallia
b) eksponentiaalista mallia.

KERTAUS

Lineaarinen muutos



Suureen y riippuvuus suureesta x on lineaarinen, jos riippuvuutta kuvaa suora.

Aina, kun x kasvaa yhdellä, niin y muuttuu yhtä paljon.

Tyttöjen keskipituus kasvaa likimain lineaarisesti ikävuosina 4–13.

Näinä ikävuosina jokainen vuosi kasvattaa keskipituutta noin 6 cm.

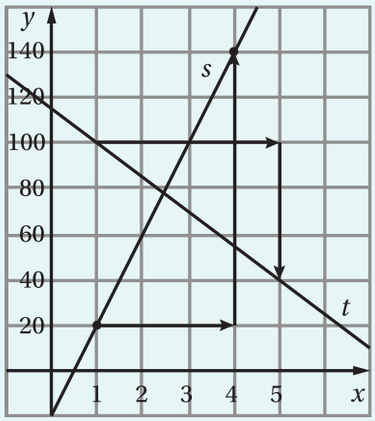
Kulmakerroin

Kun siirrytään suoran pisteestä toiseen pisteeseen, suhde

$$\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$$

on aina sama. Suhdetta kutsutaan suoran kulmakertoimeksi.

Nousevan suoran kulmakerroin on positiivinen, ja laskevan suoran kulmakerroin on negatiivinen.



Suoran s kulmakerroin on

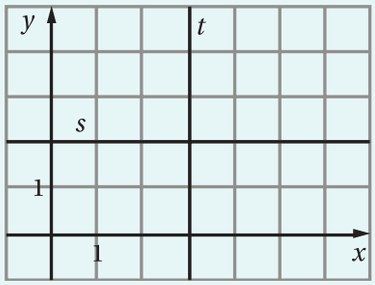
$$\frac{y\text{:n muutos}}{x\text{:n muutos}} = \frac{120}{3} = 40.$$

Suoran t kulmakerroin on

$$\frac{y\text{:n muutos}}{x\text{:n muutos}} = \frac{-60}{4} = -15.$$

Jos suora on x-akselin suuntainen, y-koordinaatin muutos on aina 0. x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0.

Jos suora on y-akselin suuntainen, x-koordinaatin muutos on aina 0. y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.



Suoran s kulmakerroin on 0.
Suoralla t ei ole kulmakerrointa.

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) (missä $x_1 \neq x_2$) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pisteiden $(-1, 2)$ ja $(6, 5)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{6 - (-1)} = \frac{3}{7}.$$

Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

Suora s kulkee pisteiden $(-11, 9)$ ja $(7, 3)$ kautta, ja suora t kulkee pisteiden $(13, 1)$ ja $(-2, 6)$ kautta. Tutkitaan, ovatko suorat s ja t yhdensuuntaiset.

Suoran s kulmakerroin on

$$\frac{3-9}{7-(-11)} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Suoran t kulmakerroin on

$$\frac{6-1}{-2-13} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}.$$

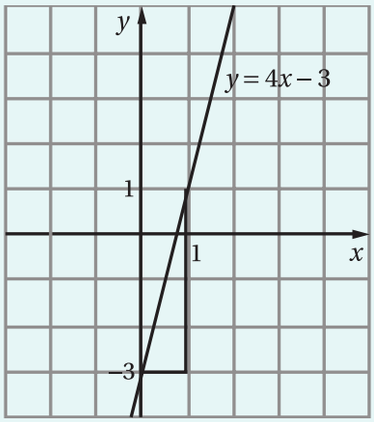
Koska kulmakertoimet ovat yhtä suuret, suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.

Suoran yhtälö

Pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat yhtälön

$y = kx + b$

muodostavat suoran. Muuttujan x kerroin k on suoran kulmakerroin. Vakiotermi b on suoran ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti.



Suoran $y = 4x - 3$ kulmakerroin on 4, ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3)$.

Sijoittamalla pisteen koordinaatit suoran yhtälöön voidaan tutkia, onko piste suoralla.

Tutkitaan, onko piste $(-17, -70)$ suoralla $y = 4x - 3$.

Sijoitetaan pisteen $(-17, -70)$ koordinaatit $x = -17$ ja $y = -70$ suoran yhtälöön $y = 4x - 3$.

$-70 = 4 \cdot (-17) - 3$
$-70 = -71$
epätosi

Piste $(-17, -70)$ ei ole suoralla $y = 4x - 3$.

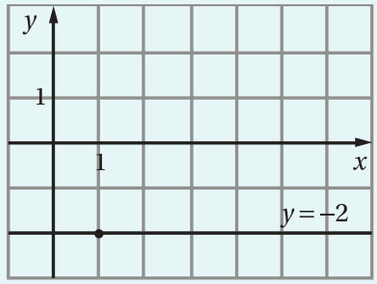
Jos suora kulkee pisteen (x_1, y_1) kautta ja suoran kulmakerroin on k, suoran yhtälö muodostetaan kaavalla

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Suora kulkee pisteen $(5, -7)$ kautta ja suoran kulmakerroin on 3. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - (-7) &= 3(x - 5) \\ y + 7 &= 3x - 15 \\ y &= 3x - 22 \end{aligned}$$

Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran yhtälö voidaan muodostaa edellä olevalla kaavalla $(k = 0)$ tai päätellä:



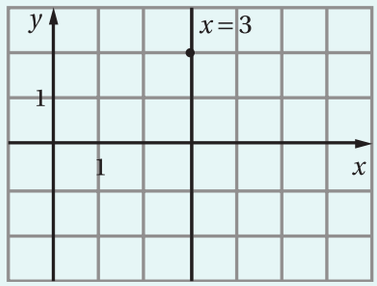
Piste on suoralla, kun sen y-koordinaatti on y_1, joten suoran yhtälö on

$$y = y_1.$$

Pisteen $(1, -2)$ kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$$y = -2.$$

Pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevalla y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Yhtälö päätellään:



Piste on suoralla, kun sen x-koordinaatti on x_1, joten suoran yhtälö on

$$x = x_1.$$

Pisteen $(3, 2)$ kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on

$$x = 3.$$

Suorien leikkauspiste

Suorien $y = k_1x + b_1$ ja $y = k_2x + b_2$ leikkauspisteen koordinaatit löydetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2. \end{cases}$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista leikkauspisteen x-koordinaatti yhtälöstä

$k_1x + b_1 = k_2x + b_2.$

y-koordinaatti saadaan, kun x-koordinaatti sijoitetaan jommankumman suoran yhtälöön.

Ratkaistaan suorien $y = 4x - 5$ ja $y = x + 1$ leikkauspiste.

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Symbolisella laskimella saadaan $x = 2$ ja $y = 3$. Leikkauspiste on piste $(2, 3)$.

Ratkaistaan x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= x + 1 \\ 4x - x &= 1 + 5 \\ 3x &= 6 \qquad | : 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön $y = x + 1$.

$y = 2 + 1 = 3$

Leikkauspiste on $(2, 3)$.

Muutosprosentti ja muuttunut arvo

Kun lasketaan muutosprosentti, niin ensin lasketaan, kuinka monta prosenttia muuttunut arvo on muutosta edeltävästä arvosta. Muutosprosentti on lasketun prosenttiluvun poikkeama 100 %:sta.

Bussilipun hinta nousi 2,20 eurosta 2,70 euroon. Lasketaan, kuinka monta prosenttia lipun hinta nousi.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia korotettu hinta on vanhasta hinnasta.

$$\frac{2{,}70}{2{,}20} \approx 1{,}23 = 123\ \%$$

Korotettu hinta on 123 % alkuperäisestä hinnasta. Koska $123\ \% - 100\ \% = 23\ \%$, hinta nousi 23 %.

Kun lasketaan muuttunut arvo, niin ensin lasketaan, kuinka monta prosenttia muuttunut arvo on alkuperäisestä. Tästä saadaan kerroin muuttuneen arvon laskemiseksi.

Hintaa 34 euroa alennetaan 15 %. Lasketaan alennettu hinta.

Alennettu hinta on $100\ \% - 15\ \% = 85\ \%$ alkuperäisestä hinnasta. Koska $85\ \% = 0{,}85$, alennettu hinta on

$0{,}85 \cdot 34 \text{ euroa} = 28{,}90 \text{ euroa}$.

Potenssi

Kun eksponentti on nolla, potenssin arvo on 1.

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$ $\qquad 12{,}83^0 = 1$

Kun eksponentti on negatiivinen kokonaisluku $-n$, niin potenssin arvo on potenssin a^n käänteisluku.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

Potenssilausekkeet voidaan sieventää symbolisella laskimella.

Potenssilausekkeita voidaan sieventää myös purkamalla ensin potenssit tuloiksi $\qquad a^3 \cdot a^4 = aaa \cdot aaaa = a^7$

tai

käyttämällä potenssikaavoja.

Samankantaisten potenssien tulo ja osamäärä

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^6 \cdot a^2 = a^{6+2} = a^8$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad \frac{10^{12}}{10^3} = 10^{12-3} = 10^9$

Potenssin potenssi

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad (2^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} = 2^{20}$

Tulon ja osamäärän potenssi

$(ab)^n = a^n b^n$ $\qquad (2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\qquad \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$

Kymmenpotenssimuoto

Luvun 10 potensseja käytetään usein lukujen merkitsemiseen.

$6{,}8 \cdot 10^7 = 6{,}8 \cdot 10\,000\,000 = 68\,000\,000$
$8{,}5 \cdot 10^{-5} = 8{,}5 \cdot 0{,}000\,01 = 0{,}000\,085$

$2\,300\,000 = 2{,}3 \cdot 1\,000\,000 = 2{,}3 \cdot 10^6$
$0{,}000\,681 = 6{,}81 \cdot 0{,}0001 = 6{,}81 \cdot 10^{-4}$

Laskin esittää suuret ja pienet luvut kymmenpotenssimuodossa.

Kun lasketaan potenssin $17{,}1^{-4}$ arvo, jotkin laskimet näyttävät tuloksen kymmenpotenssimuodossa. Kolmen numeron tarkkuudella

$17{,}1^{-4} \approx 1{,}17 \cdot 10^{-5} = 1{,}17 \cdot 0{,}000\,01$

$= 0{,}000\,011\,7.$

Eksponenttifunktio

Jos suure tulee jokaisessa muutosvaiheessa kerrotuksi samalla luvulla k, niin suure muuttuu eksponentiaalisesti. Suureen muutosta voidaan tällöin kuvailla eksponenttifunktion k^x avulla.

Bakteerien lukumäärä eräässä bakteerikannassa $1{,}9$-kertaistuu joka tunti. Jos bakteerien lukumäärä nyt on 170 miljoonaa, niin bakteerien lukumäärän miljoonina x tunnin kuluttua ilmaisee funktio $f(x) = 1{,}9^x \cdot 170$.

Kolmen tunnin kuluttua $(x = 3)$ bakteerien määrä on $f(3) = 1{,}9^3 \cdot 170 \approx 1\,200$ miljoonaa.

Neljä tuntia sitten $(x = -4)$ määrä oli
$f(-4) = 1{,}9^{-4} \cdot 170 \approx 13$ miljoonaa.

Puoli tuntia sitten $(x = -0{,}5)$ määrä oli
$f(-0{,}5) = 1{,}9^{-0{,}5} \cdot 170 \approx 120$ miljoonaa.

Logaritmi

Luvun a k-kantainen logaritmi on eksponentin arvo, kun luku a ilmaistaan kantaluvun k potenssina.

Luvun 16 2-kantainen logaritmi on 4, sillä $16 = 2^4$.

Luvun 0,01 10-kantainen logaritmi on -2, sillä $0{,}01 = 10^{-2}$.

Luku, jonka 5-kantainen logaritmi on 3, on $5^3 = 125$.

Luvun a k-kantainen logaritmi merkitään $\log_k a$.

Edellä havaittiin, että $\log_2 16 = 4$ ja $\log_{10} 0{,}01 = -2$.

Havaittiin myös, että jos $\log_5 a = 3$, niin $a = 5^3 = 125$.

Luvun a kymmenkantaista logaritmia merkitään myös $\lg a$. Siis

$\lg a = \log_{10} a$.

Edellä havaittiin, että $\lg 0{,}01 = -2$. Lisäksi esimerkiksi $\lg 10\,000 = 4$, sillä $10\,000 = 10^4$.

Jos $\lg a = 3{,}78$, niin $a = 10^{3{,}78} \approx 6\,030$.

Logaritmille pätee potenssin logaritmikaava

$\log_k a^s = s \log_k a$.

Siis potenssin a^s logaritmi on luvun a logaritmi kerrottuna eksponentilla s.

Kokonaisluvut 5^{2013} ja 6^{1800} ovat niin suuria, että niitä ei voida laskea laskimen potenssinäppäimellä. Tutkitaan logaritmin avulla, kumpi luvuista on suurempi.

$\lg 5^{2013} = 2013 \cdot \lg 5 \approx 1407{,}0$

$\lg 6^{1800} = 1800 \cdot \lg 6 \approx 1400{,}7$

Luvuista suurempi on 5^{2013}, sillä sen 10-kantainen logaritmi on suurempi.

Logaritmin määritelmässä oletetaan, että kantaluku k on positiivinen. Siten vain positiivisella luvulla on logaritmi. Luvulla 0 ja negatiivisilla luvuilla ei ole logaritmia.

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$

Eksponenttiyhtälö $k^x = a$ voidaan ratkaista symbolisella laskimella.

Eksponenttiyhtälö voidaan ratkaista myös potenssin logaritmikaavan avulla.

Yhtälön $k^x = a$ ratkaisu on

$$x = \frac{\lg a}{\lg k}.$$

Onnekas 8 000 euron osakesijoitus kasvaa vuosittain 8 %. Ratkaistaan, kuinka monessa vuodessa sijoituksen arvo ylittää 40 000 euroa.

Sijoituksen arvo tulee joka vuosi 1,08-kertaiseksi, joten x vuoden kuluttua arvo on $1{,}08^x \cdot 8\,000$.

Ratkaistaan, kuinka monen vuoden kuluttua arvo on 40 000.

$$1{,}08^x \cdot 8\,000 = 40\,000$$

$$x \approx 20{,}9$$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

$$1{,}08^x \cdot 8\,000 = 40\,000 \quad | : 8\,000$$

$$1{,}08^x = 5$$

$$\lg 1{,}08^x = \lg 5$$ Käytetään potenssin logaritmikaavaa.

$$x \cdot \lg 1{,}08 = \lg 5 \quad | : \lg 1{,}08$$

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 1{,}08} \approx 20{,}9$$

Sijoituksen arvo ylittää 40 000 euroa 21 vuodessa.

Korkeammat juuret ja potenssiyhtälö

Jos n on pariton, niin yhtälöllä $x^n = a$ on aina yksi ratkaisu. Ratkaisu on luvun a n. juuri ja se merkitään $\sqrt[n]{a}$.

Jos n on parillinen, niin yhtälöllä $x^n = a$ on ratkaisu, jos a on positiivinen tai 0. Yhtälön ratkaisu, joka on positiivinen tai nolla, on luvun a n. juuri $\sqrt[n]{a}$. Myös n. juuren vastaluku toteuttaa yhtälön.

$x^5 = 700$

$x = \sqrt[5]{700} \approx 3{,}71$

$x^4 = 6$

$x = \sqrt[4]{6} \approx 1{,}565$ tai $x = -\sqrt[4]{6} \approx -1{,}565$

Radioaktiivisen aineen määrä pienenee kahdeksassa vuorokaudessa neljännekseen alkuperäisestä. Ratkaistaan, kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa vuorokaudessa.

Olkoon a aineen määrä nyt. Aineen määrä tulee joka vuorokausi kerrotuksi samalla luvulla k, joten kahdeksan vuorokauden kuluttua aineen määrä on $k^8 \cdot a$. Aineen määrä on tällöin neljäsosa tämänhetkisestä määrästä eli $0{,}25a$.

Ratkaistaan k.

$k^8 \cdot a = 0{,}25a$

$k \approx -0{,}84$ tai $k \approx 0{,}84$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$k^8 \cdot a = 0{,}25a \quad | : a$

$k^8 = 0{,}25$

$k = \sqrt[8]{0{,}25} \approx 0{,}84$ tai $k = -\sqrt[8]{0{,}25} \approx -0{,}84.$

Vain positiivinen juuri voi olla vähenemiskerroin. Aineen määrä tulee vuorokaudessa 0,84-kertaiseksi eli aineesta hajoaa vuorokaudessa 16 %.

KERTAUSTEHTÄVIÄ

Tehtävät ovat edellä olevan kertauksen otsikoiden mukaisesti järjestettyjä perustehtäviä.

Lineaarinen muutos

331. Liisa lähti pyöräilemään kello 10. Kello 13 hän oli ehtinyt 48 km:n päähän.

a) Millainen on matkan edistymisen kuvaaja, jos oletetaan, että pyöräilyvauhti on koko ajan sama?

b) Kuinka pitkälle Liisa ehtii kello 15:een mennessä?

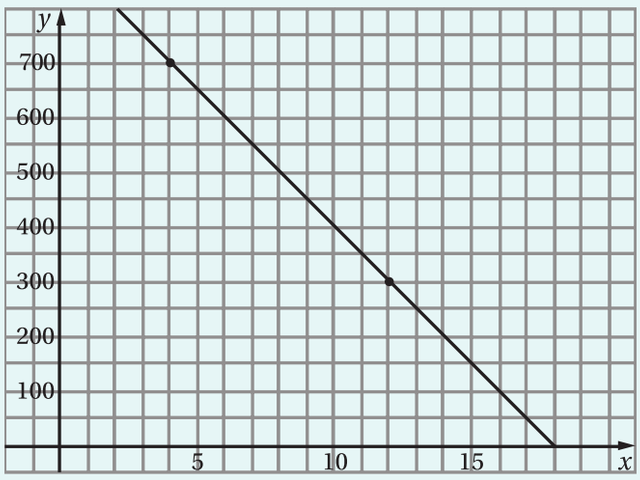
c) Milloin Liisa on perillä 112 km:n päässä?

332. Säiliössä oli marraskuun 4. päivänä öljyä 700 litraa ja marraskuun 12. päivänä 300 litraa. Tulkitse kuvaajaa.

a) Mitä edustaa x-koordinaatti ja mitä y-koordinaatti?

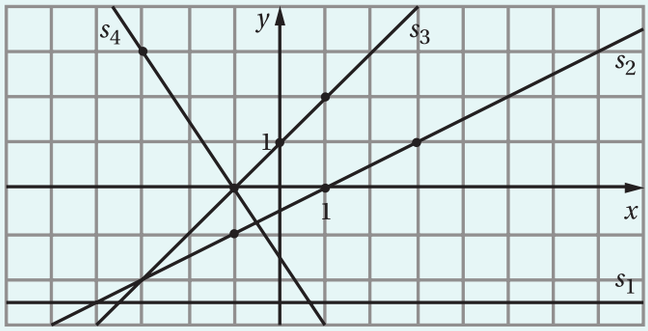
b) Mihin oletukseen perustuu suoran käyttäminen kuvaajana?

c) Mikä ennuste saadaan öljyn loppumiselle?



Kulmakerroin

333. Määritä kuviosta suorien kulmakertoimet.



334. Piirrä seuraavat suorat:

suora s_1, joka kulkee pisteen $(1, 4)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $\frac{2}{3}$

suora s_2, joka kulkee pisteen $(3, 3)$ kautta ja jonka kulmakerroin on -2

suora s_3, joka kulkee pisteen $(2, 1)$ kautta ja jonka kulmakerroin on 0.

335. Suora kulkee pisteiden

a) $(5, 3\,400)$ ja $(12, 2\,000)$

b) $(-3, 5)$ ja $(1, 4)$

c) $(4, -1)$ ja $(-2, -5)$

kautta. Määritä suoran kulmakerroin. Onko suora nouseva vai laskeva?

336. Suora s_1 kulkee pisteiden $(-6, 4)$ ja $(0, -5)$ kautta ja suora s_2 pisteiden $(1, 10)$ ja $(8, 0)$ kautta. Ovatko suorat s_1 ja s_2 yhdensuuntaiset? Jos suorat eivät ole yhdensuuntaiset, niin kumpi niistä laskee jyrkemmin?

Suoran yhtälö

337. Mikä on suoran $y = -x + 6$ kulmakerroin? Missä pisteessä suora leikkaa y-akselin?

338. Onko piste $(14, -37)$ suoralla $y = -3x + 5$?

339. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 4$ ja $y = 2$.

340. Muodosta yhtälö suoralle, joka
a) kulkee origon kautta ja jonka kulmakerroin 4
b) kulkee pisteen $(-1, -6)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$.

341. Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(-4, 3)$ kautta ja joka on
a) x-akselin suuntainen
b) y-akselin suuntainen.

342. Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(4, -1)$ kautta ja joka on yhdensuuntainen suoran $y = -2x + 3$ kanssa. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

343. Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee pisteiden
a) $(-4, 1)$ ja $(-1, 7)$
b) $(160, 40)$ ja $(280, 10)$
c) $(1, -3)$ ja $(4, -2)$
kautta.

344. Lukiolainen Joni arvelee (suuresti yksinkertaistaen), että kokeeseen valmistautumiseen käytetyn ajan x (tuntia) ja kokeesta saadun pistemäärän y (0–36 pistettä) välistä riippuvuutta voidaan kuvata suoralla. Eräästä kokeesta, johon hän ei valmistautunut lainkaan, hän sai 11 pistettä. Seuraavasta kokeesta, johon hän valmistautui 2 tuntia, hän sai 25 pistettä. Muodosta riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälö. Mikä pistemäärä tämän perusteella on odotettavissa, jos Joni valmistautuu kokeeseen $2{,}5$ tuntia?

Suorien leikkauspiste

345. Missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa?
a) $y = 3x - 4$ ja $y = x + 6$
b) $y = x$ ja $y = 5x - 7$

346. Missä pisteessä suorat $y = 2x - 1$ ja $y = -\frac{1}{4}x + 2$ leikkaavat toisensa?

347. Suorat $y = -3x + 6$ ja $y = -2x + 10$ rajaavat yhdessä x-akselin kanssa kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

Prosenttilaskenta

348. Vuonna 1992 yli kymmenvuotiaat suomalaiset katsoivat televisiota keskimäärin 1 tunnin 59 minuuttia päivässä. Vuonna 2012 keskimääräinen katseluaika oli 3 tuntia 3 minuuttia. Kuinka monta prosenttia katseluaika oli lisääntynyt?

349. Kuhmon väkiluku vuonna 1978 oli $14\,048$ ja vuonna 2012 $9\,242$. Kuinka monta prosenttia väkiluku oli pienentynyt?

350. Myyjä havaitsee housuissa tahran ja tarjoutuu alentamaan housujen $79{,}90$ euron hintaa 15 %. Laske alennettu hinta.

351. Palkkoja korotetaan $3{,}7$ %. Kuinka suuriksi kasvavat $2\,318{,}47$ euron ja $3\,196{,}04$ euron kuukausipalkat?

352. Osakkeiden arvo nousi ensimmäisenä omistusvuotena 47 % ja toisena vuotena 53 %, mutta romahti kolmantena vuotena 95 %. Kuinka monta prosenttia hankinta-arvoa suurempi tai pienempi osakkeiden arvo oli kolmen omistusvuoden jälkeen?

353. Yrityksen vuoden 2012 liikevaihto 683 miljoonaa euroa oli 12,8 % edellisen vuoden liikevaihtoa pienempi. Kuinka suuri yrityksen liikevaihto oli vuonna 2011?

Potenssi

354. Sievennä.

a) $a \cdot a^5$ **b)** $\dfrac{b^8}{b^7}$

c) $(y^4)^5$

355. Kuinka käy kuution tilavuudelle, kun kuution särmän pituus

a) viisinkertaistuu

b) pienenee kolmasosaan?

(Ohje: Merkitse alkuperäisen kuution särmän pituutta a ja ilmaise lausekkeena kuution särmän pituus muutoksen jälkeen.)

356. Sievennä.

a) $(-5x)^3$ **b)** $2\left(\dfrac{x}{2}\right)^4$

c) $a^3(ab^3)^2$ **d)** $\dfrac{(3ab^4)^2}{9b^3}$

Kymmenpotenssimuoto

357. Muuta luku tavalliseen muotoon.

a) $3{,}8 \cdot 10^8$ **b)** $7{,}12 \cdot 10^{-5}$

358. Ilmaise luku kymmenpotenssimuodossa pyöristettynä kolmen numeroon tarkkuuteen.

a) 79 962 145 600

b) 0,000 008 096 75

359. Kuinka kauan kestää televisiokuvan kulku Yhdysvalloista Suomeen? Matka satelliitin kautta on noin 80 000 km. Kuvasignaali kulkee valonnopeudella $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

360. Uraaniatomin massa on $4{,}0 \cdot 10^{-22}$ g. Kuinka monta uraaniatomia on 2,38 kilogrammassa uraania?

Eksponenttifunktio

361. Kuinka suureksi kasvaa 2 000 euron sijoitus 20 vuodessa, jos vuotuinen korkotuotto on 4,5 %?

362. Laske eksponenttifunktion $f(x) = 0{,}7^x$ arvot $f(3)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$, $f(-1)$ ja $f(-3)$. Hahmottele laskettujen arvojen avulla funktion kuvaaja.

363. Erään bakteerikasvuston massa 2,9-kertaistuu vuorokaudessa. Massa on nyt 130 g. Muodosta funktio $m(x)$, joka ilmaisee bakteerikasvuston massan grammoina x vuorokauden kuluttua. Kuinka suuri massa

a) on kolmen vuorokauden kuluttua

b) on kuuden tunnin kuluttua

c) oli 1,5 vuorokautta sitten?

364. Lammen vedestä vaihtuu 3,5 % vuorokaudessa. Kuinka monta prosenttia lampeen valuneesta ja veteen tasaisesti sekoittuneesta myrkystä on jäljellä 15 vuorokauden kuluttua?

365. Heijastamaton erikoislasi, jonka paksuus on 1,0 cm, pidättää 23 % auringon lämpösäteilystä. Kuinka monta prosenttia lämpösäteilystä pidättää samanlainen lasi, jonka paksuus on

a) 0,70 cm **b)** 2,5 cm?

Logaritmi

366. Mikä on
a) luvun 81 3-kantainen logaritmi
b) luvun $\frac{1}{7}$ 7-kantainen logaritmi
c) luvun 100 000 10-kantainen logaritmi?

367. **a)** Minkä luvun 12-kantainen logaritmi on 4?
b) Määritä kahden numeron tarkkuudella luku, jonka 10-kantainen logaritmi on $-3{,}14$.

368. Määritä.
a) $\log_2 32$ **b)** $\log_2 2^{11}$

369. Määritä.
a) $\log_{10} 1\,000\,000$ **b)** $\lg 0{,}001$

370. Määritä kolmen numeron tarkkuudella luku a, kun
a) $\log_2 a = 4{,}65$ **b)** $\lg a = 5{,}16$.

371. **a)** Laske kolmen numeron tarkkuudella funktion $f(x) = 1{,}70 + 1{,}15 \lg x$ arvo kohdassa 1 700.
b) Määritä funktion f nollakohta kolmen numeron tarkkuudella.

372. Maanjäristyksen voimakkuuden M richtereinä liittää vapautuneen energian määrään E likimääräinen kaava $M = 3{,}2 + 0{,}67 \lg E$. Energian yksikkönä on megawattitunti. Energian kokonaiskulutus Suomessa vuonna 2012 oli 380 miljoonaa megawattituntia. Kuinka voimakkaassa maanjäristyksessä vapautuu näin suuri määrä energiaa?

373. Kumpi luvuista 8^{1401} ja 6^{1628} on suurempi?

Eksponenttiyhtälö

374. Ratkaise yhtälö kahden numeron tarkkuudella.
a) $15^x = 45$ **b)** $1{,}7^x \cdot 2 = 1\,000$

375. Lasketaan luvun 2 kokonaislukupotensseja $2^1 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ jne. Mikä on ensimmäinen potenssi, jonka arvo ylittää 6 miljardia?

376. Kuinka monessa vuodessa palkka kaksinkertaistuu, jos vuotuinen korotusprosentti on 3,0?

377. Saarelle tuotujen kanien lukumäärä kasvoi ensimmäisenä vuotena 200:sta 350:een. Kuinka monen vuoden kuluttua tuomisesta kanien määrä on 200 000, jos kannan vuotuinen lisääntymisprosentti pysyy samana?

378. Yritys vähentää kirjanpidossaan koneen arvosta joka vuosi 15 %. Kuinka monen vuoden jälkeen koneen kirjanpitoarvo on vähemmän kuin kymmenesosa hankinta-arvosta?

Potenssiyhtälö

379. Ratkaise yhtälö kolmen numeron tarkkuudella.
a) $x^{10} = 2\,000$ **b)** $4 \cdot x^5 = 1$

380. Kuinka suuri vuotuisen koron tulee olla, jotta sijoitettu pääoma kaksinkertaistuisi 10 vuodessa?

381. Taajaman hallittu kasvu edellyttää, että väkiluku saa seuraavan kahdeksan vuoden aikana kasvaa nykyisestä 30 000:sta enintään 40 000:een. Kuinka suuri taajaman keskimääräinen vuotuinen kasvuprosentti saa enintään olla?

382. Kuuden peräkkäisen kopiokoneella tehdyn pienennöksen jälkeen kuvion mitat olivat tulleet 0,13-kertaisiksi. Kuinka kuvion mitoille käy yhdessä kopioinnissa?

383. Eräästä radioaktiivisesta aineesta mitattiin hajonneen 77 % viikossa. Radioaktiiviselle hajoamiselle on ominaista, että aineen määrä vähenee eksponentiaalisesti.

a) Kuinka monta prosenttia aineesta hajoaa yhdessä vuorokaudessa?

b) Kuinka monessa vuorokaudessa aineesta hajoaa 98 %?

TEHTÄVÄSARJOJA

Sarjat ovat vaativuusjärjestyksessä niin, että sarja A on helpoin.

Sarja A

1. Suoran kulkee suorien $y = x - 5$ ja $y = -2x + 1$ leikkauspisteen kautta ja on yhdensuuntainen suoran $y = 3x - 2$ kanssa. Mikä suoran yhtälö on? Onko piste $(20, 50)$ suoralla?

2. Pallon pomppu on aina $20\ \%$ matalampi kuin edellinen pomppu. Kuinka korkea on 2,5 metrin korkeudelta pudotetun pallon kymmenes pomppu?

3. Vuorokauden keskilämpötila Sodankylässä on lokakuun 1. päivänä $2{,}9\ ^\circ\text{C}$ ja marraskuun 1. päivänä $-3{,}8\ ^\circ\text{C}$. Keskilämpötila muuttuu näiden päivien välillä likimain suoraviivaisesti. Laske lineaarisen mallin avulla, minä päivänä Sodankylässä keskimäärin alkaa niin sanottu terminen talvi eli vuorokauden lämpötila alittaa $0\ ^\circ\text{C}$.

4. Hintaa alennettiin kolmeen otteeseen, ensin $10\ \%$, sitten $15\ \%$ ja lopuksi vielä $10\ \%$.
a) Kuinka monta prosenttia hinta kaikkiaan laski?
b) Lopullinen hinta oli 206,55 euroa. Mikä alkuperäinen hinta oli?

5. Kuinka monta prosenttia tulee sijoituskohteen vuodessa tuottaman koron olla, jotta viideksi vuodeksi tehdystä 15 000 euron sijoituksesta saataisiin 5 000 euron tuotto?

6. Tyhjiöpumppu poistaa yhdellä männäniskulla $3{,}0\ \%$ kammiossa olevasta kaasusta. Kuinka monta männäniskua tarvitaan poistamaan $99\ \%$ kammiossa alun perin olleesta kaasusta?

Sarja B

1. Kioskinpitäjä arvioi, että virvoitusjuomien päivämyynti riippuu suoraviivaisesti lämpötilasta. Päivänä, jonka korkein lämpötila oli $14\ ^\circ\text{C}$, kioskissa myytiin 80 pulloa virvoitusjuomia. Kun lämpötila oli $17\ ^\circ\text{C}$, myynti oli 95 pulloa.
a) Muodosta riippuvuutta kuvaava yhtälö.
b) Mikä tämän mallin perusteella on myynti hellepäivänä, jonka lämpötila on $25\ ^\circ\text{C}$?
c) Missä lämpötilassa myynti loppuu kokonaan?

2. Suorat $y = \frac{1}{2}x - 1$ ja $y = 4x + 3$ rajaavat yhdessä y-akselin kanssa kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

3. Viitenä peräkkäisenä vuotena erään elektroniikkatuotteen hinta aleni $4{,}3\ \%$, $7{,}2\ \%$, $12{,}0\ \%$, $13{,}1\ \%$ ja $5{,}2\ \%$.
a) Kuinka monta prosenttia hinta laski koko ajanjakson aikana?
b) Kuinka monta prosenttia hinta keskimäärin laski vuodessa?

4. Nelikulmion $ABCD$ kärkipisteet ovat $A(-23, -14)$, $B(3, -8)$, $C(17, 13)$ ja $D(-3, 16)$. Osoita, että nelikulmio $ABCD$ on puolisuunnikas.

5. Kaavalla $n = \frac{70}{p}$ voi likimääräisesti laskea, kuinka monessa vuodessa sijoitettu pääoma kaksinkertaistuu, kun vuotuinen korkotuotto on $p\ \%$. Vertaa kaavalla laskettua kaksinkertaistumisaikaa todelliseen kaksinkertaistumisaikaan, kun $p = 1{,}75$.

6. Cesiumin isotoopin 137 puoliintumisaika (aika, jossa määrä vähenee puoleen) on 29 vuotta. Kyseistä isotooppia karkasi Tshernobylin ydinvoimalan ympäristöön ja ilmavirtausten mukana aina Suomeenkin saakka ydinvoimalassa 26.4.1986 tapahtuneessa onnettomuudessa. Kuinka monta prosenttia tuolloin luontoon vapautuneesta radioaktiivisesta aineesta oli vielä jäljellä huhtikuun lopulla vuonna 2010?

Sarja C

1. Alueen hirvikanta on kasvanut vuosittain noin 18 % ja on nyt 4 200 yksilöä. Kuinka suuri hirvikanta oli viisi vuotta sitten?

2. Erään auton nopeusmittarin lukeman ja todellisen nopeuden välinen riippuvuus on lineaarista. Kun ajetaan nopeudella 50 km/h, nopeusmittari näyttää oikeaa lukemaa, ja kun mittari näyttää 90 km/h, todellinen nopeus on 100 km/h.
a) Kuinka suuri nopeus on, kun mittari näyttää 120 km/h?
b) Mitä lukemaa mittarin pitää näyttää, jotta nopeus on 30 km/h?

3. Taivaankappaleiden kirkkautta voidaan mitata valo-opillisilla mittausmenetelmillä. Mitatut kirkkauksien suhteet eivät kuitenkaan vastaa näköhavaintoa, sillä ihmisen näköaisti tasoittaa fysikaalisesti mitattuja kirkkaussuhteita. Taivaankappaleen havaittu kirkkaus ilmaistaankin niin sanottuna *magnitudina*, joka lasketaan fysikaalisesta kirkkaudesta kaavalla $m = -2{,}5 \log_{10} F$. Kaavassa fysikaalisen kirkkauden F yksikkönä on Lyyran tähdistössä sijaitsevan Vegan kirkkaus.
a) Venuksen fysikaalinen kirkkaus on 58 kertaa niin suuri kuin Vegan, ja Linnunradan kirkkaimman tähden Siriuksen kirkkaus on 4,0 kertaa niin suuri kuin Vegan. Määritä Venuksen ja Siriuksen magnitudit.
b) Himmeimmät taivaankappaleet, jotka ihminen pystyy paljaalla silmällä havaitsemaan, ovat magnitudiltaan 6,0. Vertaa tällaisten taivaankappaleiden fysikaalista kirkkautta Vegan kirkkauteen.

4. Kunnassa havaittiin vuonna 2012, että kunnan nuorisotoimen määrärahoja oli vuoden 2007 jälkeen pienennetty joka vuosi 5 %. Määrärahat päätettiin nostaa seuraavan kolmen vuoden aikana vuoden 2007 tasolle korottamalla niitä joka vuosi yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia määrärahoja tulee joka vuosi korottaa?

5. Mitkä ovat ne pisteen $(1, 0)$ kautta kulkevat suorat, jotka rajaavat suoran $y = -\frac{2}{3}x + 4$ ja x-akselin kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 10?

6. Juomapullo vietiin 4 °C:n lämpöisenä ulos 27 °C:n lämpötilaan varjoiselle pöydälle. Kun pullo neljän tunnin kuluttua avattiin, juoman lämpötila oli 21 °C. Milloin juoma olisi pitänyt viimeistään nauttia, kun sopiva nauttimislämpötila oli korkeintaan 12 °C? Lämpeneminen ympäristön lämpötilaan tapahtuu niin, että juoman ja ympäristön lämpötilaero pienenee aina samassa ajassa yhtä monta prosenttia.

VASTAUKSET

Lineaarinen muutos ja kulmakerroin

1. 320 kävijää $\left(\frac{120}{1{,}5} = 80 \text{ kävijää tunnissa}\right)$

2. **a)** 200 **b)** 150 **c)** −50

3. Suoran s kulmakerroin on 3, suoran t kulmakerroin on $\frac{2}{3}$ ja suoran u kulmakerroin on 0.

4. Suoran s kulmakerroin on −1 ja suoran t kulmakerroin on −4. Suoralla u ei ole kulmakerrointa.

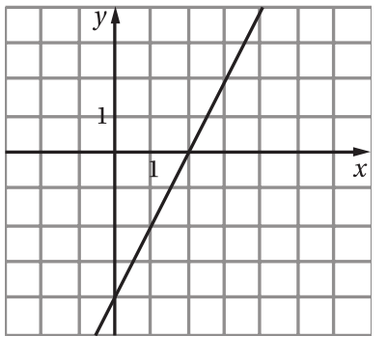
5. **a)** Muutokset ovat noin 70, 180 ja 330.
b) Suhteet ovat noin 100 ja 210.
c) Ei voida, sillä suhteet $\frac{y\text{-koordinaatin muutos}}{x\text{-koordinaatin muutos}}$ eivät pysy samana.

6. **a)** Kasvaa viidellä.
b) Kasvaa 20:lla.
c) Pienenee 15:llä.

7. **a)** Pienenee 20:lla.
b) Pienenee 100:lla.
c) Suurenee 40:llä.

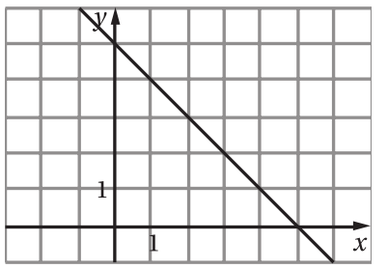
8. **a)** −0,22 °C $\left(\frac{-6{,}6}{30}\right)$
b) −1,0 °C
c) Ei jatku, sillä silloin esimerkiksi 180 vuorokauden kuluttua keväällä vuorokauden keskilämpötila olisi −36 °C.

9. **a)**



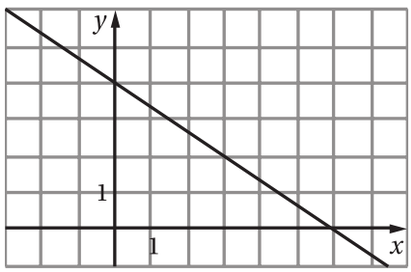
Pisteessä (0, −4).

b)



Pisteessä (0, 5).

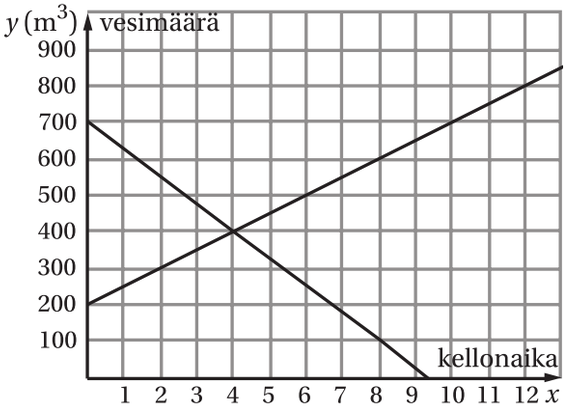
c)



Pisteessä (0, 4).

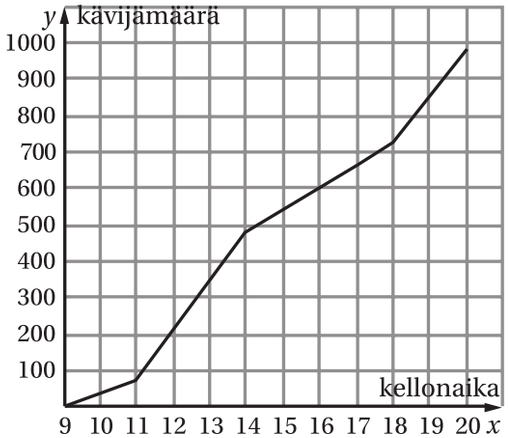
10. **a)** Aino 30 km/h, Lauri 20 km/h
b) tunnin myöhemmin
c) 60 km, 3 tuntia

11. Suurin vedenkulutus kello 6–8, jolloin kulutus oli 150 m^3 tunnissa.
Pienin vedenkulutus kello 1–5, jolloin kulutus oli 25 m^3 tunnissa.

12. 

a) Kello 0.00 säiliössä on 700 kuutiometriä vettä, ja säiliöstä virtaa pois vettä 75 kuutiometriä tunnissa.

b) Kello 0.00 säiliössä on 200 kuutiometriä vettä, ja säiliöön virtaa vettä 50 kuutiometriä tunnissa.

13. 

Hiljaisinta oli aamulla kello 9–11 (36 kävijää tunnissa). Vilkkainta oli keskipäivällä kello 11–14 (136 kävijää tunnissa).

14. noin 50 litraa

(Öljyn määrä vähenee $\frac{1\,050 - 710}{19} \approx 17{,}9$ litraa vuorokaudessa. Joulupäivästä 25.12. on tammikuun viimeiseen päivään 37 vuorokautta.)

15. Saa, sillä marjat hupenevat 20 litralla tunnissa.

16. **a)** –9,3 °C **b)** –22 °C

17. **a)** suoralle a

b) suora a 0,25, suora b 0,1 ja suora c –0,05

c) Suoralla a suurenee 25:lla, suoralla b suurenee 10:llä ja suoralla c pienenee 5:llä.

18. Suoran s_1 kulmakerroin on $\frac{1}{4}$.

Suoran s_2 kulmakerroin on 1.

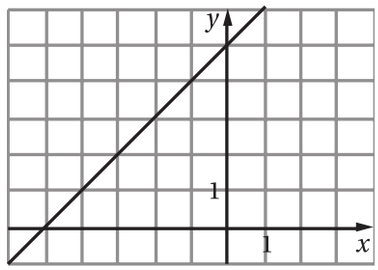
Suoralla s_3 ei ole kulmakerrointa.

Suoran s_4 kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$.

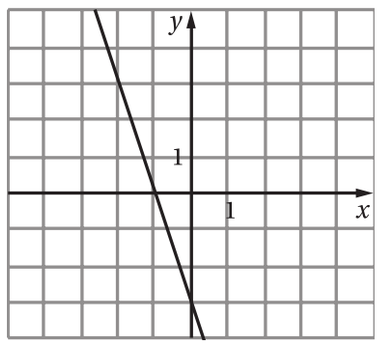
Suoran s_5 kulmakerroin on $-\frac{1}{4}$.

19. Kulmakerroin on

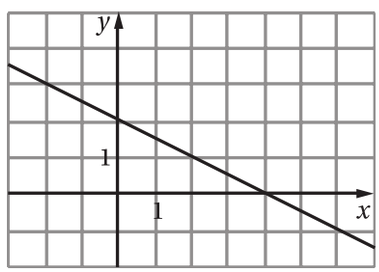
a) 3 **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** 0.

20. **a)** 

Pisteessä (–5, 0).

b) 

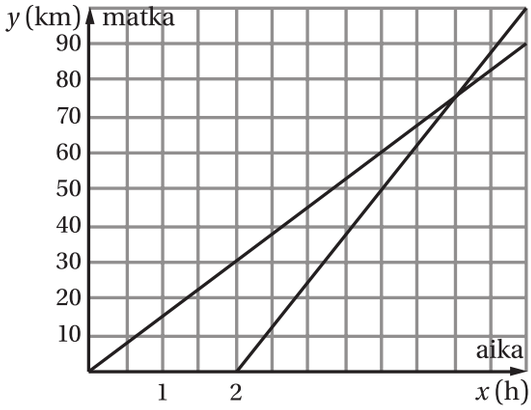
Pisteessä (–1, 0).

c) 

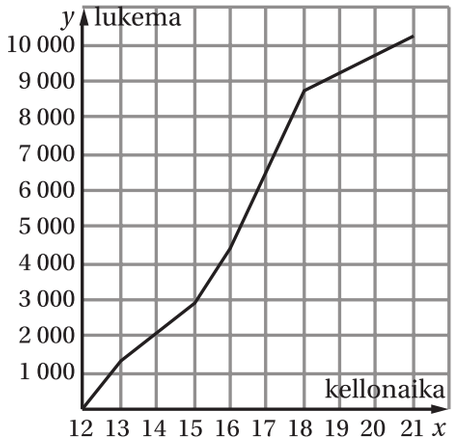
Pisteessä (4, 0).

21. **a)** Suurenee 12:lla. Pienenee kuudella.

b) Pienenee neljällä. Suurenee kahdella.

22. 

a) 3 tuntia **b)** 75 km

23. 

Vilkkainta kello 16–18, jolloin liikennevirta oli 2 148 ajoneuvoa tunnissa.
Hiljaisinta kello 18–21, jolloin liikennevirta oli 509 ajoneuvoa tunnissa.

Kulmakertoimen laskeminen

24. **a)** 1, nouseva $\left(\frac{0-5}{1-6} \text{ tai } \frac{5-0}{6-1}\right)$

b) $-\frac{1}{4} = -0{,}25$, laskeva $\left(\frac{-2-0}{3-(-5)} \text{ tai } \frac{0-(-2)}{-5-3}\right)$

c) 0, x-akselin suuntainen

d) $\frac{2}{3}$, nouseva

25. lausekkeilla a ja d

26. 2, $\frac{1}{2}$, 0 ja -1

27. Suorat s_1 ja s_3 ovat yhdensuuntaiset, koska niiden molempien kulmakerroin on 2.

28. Leikkaavat, sillä suorat eivät ole yhdensuuntaiset.
(Ensimmäisen suoran kulmakerroin on $\frac{2}{5}$ ja jälkimmäisen $\frac{1}{3}$.)

29. **a)** Ei ole, sillä janan AB kulmakerroin on $\frac{43}{14} \approx 3{,}07 \neq 3$.
b) On, sillä janan AC kulmakerroin on 3.

30. Sivujen AB ja CD kulmakerroin on $-\frac{26}{17}$, joten sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset. Sivujen AD ja BC kulmakerroin on $\frac{5}{19}$, joten sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset. Koska vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, nelikulmio on suunnikas.

31. $A(-\frac{26}{3}, 0)$
(Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakertoimen $\frac{10}{3-x}$ tulee olla yhtä suuri kuin pisteiden C ja D kautta kulkevan suoran kulmakerroin. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.)

32. Janan AB kulmakerroin on 100, janan BC kulmakerroin 50, janan CD kulmakerroin 0 ja janan DE kulmakerroin 75. Kulmakertoimet ovat keskinopeudet yksikkönä km/h ensimmäisen puolen tunnin, seuraavan tunnin, sitä seuraavan puolen tunnin ja viimeisen kahden tunnin aikana.

33. **a)** $-\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$

34. Suoran s kulmakerroin on $-\frac{7}{5} = -1{,}4$, ja suoran t kulmakerroin on $-\frac{13}{9} \approx -1{,}44$.
Suora t laskee jyrkemmin.

35. **a)** $\frac{1}{3}$
(Symboliseen laskimeen näppäillään $\frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-3}$ tai $\frac{\frac{1}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{3-\frac{1}{2}}$.)
b) -2

36. 12,5; 0 ja –50

37. $\frac{8}{5} = 1{,}6$

38. Eivät ole, sillä suorien kulmakertoimet 42 ja $\frac{5541}{130} \approx 42{,}6$ eivät ole yhtä suuret.

39. On, sillä janan AC kulmakerroin $-\frac{40}{16} = -\frac{5}{2}$ on yhtä suuri kuin pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

40. $k_{OA} = k_{BC} = \frac{7}{16}$ ja $k_{OC} = k_{AB} = -\frac{7}{5}$, joten nelikulmio on suunnikas.

41. Voidaan. Valitaan piste $D = (0, 11)$.
(Pistettä D voidaan merkitä $D(0, y)$. Sivu AD on yhdensuuntainen sivun BC kanssa, kun sivun AD kulmakerroin $\frac{y-2}{3}$ on yhtä suuri sivun BC kulmakerroin. Yhtälön avulla saadaan $y = 11$. Kun $D = (0, 11)$, niin sivun DC kulmakerroin on yhtä suuri kuin sivun AB kulmakerroin, joten myös sivut DC ja AB ovat yhdensuuntaiset.)

42. Janan AB kulmakerroin on noin 93. Ensimmäisen kolmen tunnin aikana juna kulkee 280 km:n matkan raja-asemalle noin 93 km/h keskinopeudella.
Janan BC kulmakerroin on $\frac{0}{1} = 0$. Juna seisoo tunnin raja-asemalla.
Janan CD kulmakerroin on noin 74. Juna kulkee loppumatkan noin 74 km/h keskinopeudella.

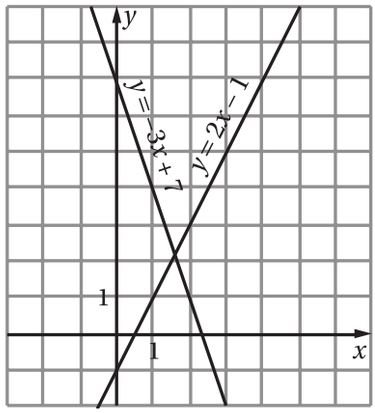
Suoran yhtälö

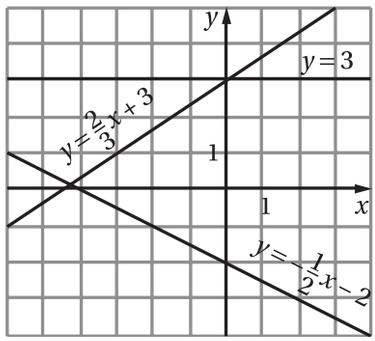
43. **a)** Ei ole. **b)** On.

44. **a)** kulmakerroin 12, leikkauspiste $(0, -30)$
b) kulmakerroin 1, leikkauspiste $(0, 2)$
c) kulmakerroin $\frac{2}{3}$, leikkauspiste origo
d) kulmakerroin -3, leikkauspiste $(0, 7)$ $(y = -3x + 7)$
e) kulmakerroin 0, leikkauspiste $(0, 5)$

45. **a)** $y = 6x - 5$
b) $y = -x + 4$
c) $y = 1{,}6x$

46. **a)** $y = -3x + 1$
b) $y = -3x - 4$
c) $y = -3x$

47.


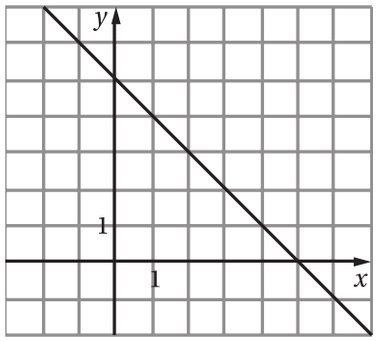
48.


49. s: $y = 2x - 1$
t: $y = \frac{1}{3}x + 5$
u: $y = -3x + 7$

50. **a)** $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}\right)$

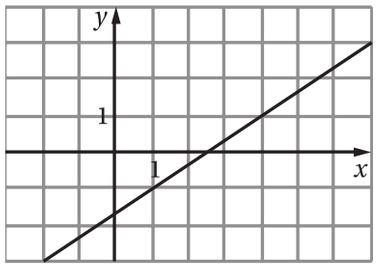
b) $\left(-\frac{4}{3}, 3\right)$

51. **a)** $b = 5$



(Pisteen $(4, 1)$ koordinaattien tulee toteuttaa suoran yhtälö, eli tulee olla $1 = -4 + b$.)

b) $b = -\frac{5}{3}$



(Apukolmio kannattaa piirtää pisteeseen $(4, 1)$. Jos lasketaan suoran pisteitä, kannattaa valita x:n arvoja, joiden poikkeama luvusta 4 on jaollinen kolmella.)

52. **a)** kulmakerroin $-\frac{1}{6}$, pisteessä $(0, \frac{2}{3})$

b) kulmakerroin -1, pisteessä $(0, 5)$

c) kulmakerroin 0, pisteessä $(0, -3)$

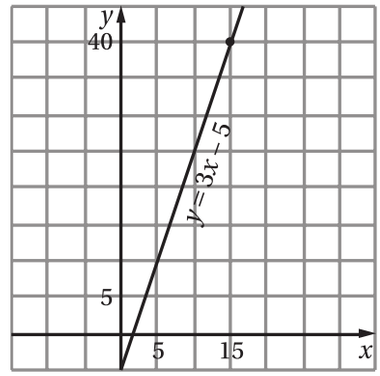
53. s_1 ja s_4 (kulmakerroin 3) sekä s_5 ja s_6 (kulmakerroin -1)

54. **a)** $y = x - 4$

b) $y = -\frac{2}{7}x - 4$

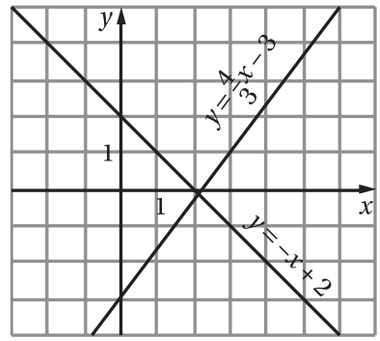
c) $y = -4$

55. $(0, -5)$



Piste $(15, 40)$ on suoralla.

56. **a)** -1 **b)** $\frac{4}{3}$



57. s: $y = -x + 2$

t: $y = \frac{1}{2}x + 4$

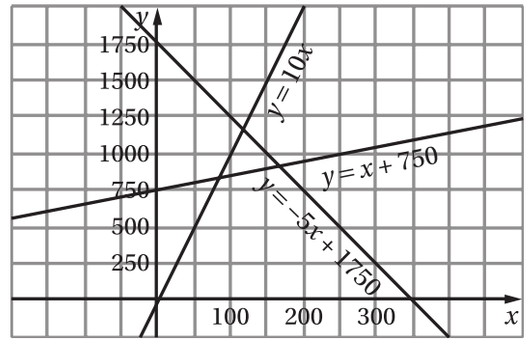
u: $y = -\frac{2}{7}x - 1$

58. s: $y = 5x + 500$

t: $y = 3x + 250$

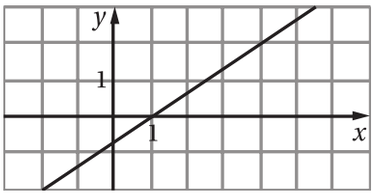
u: $y = -4x + 1500$

59.

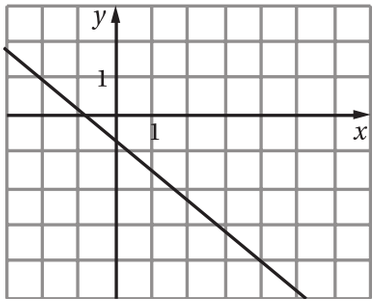


60. $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

61. **a)** $k = \frac{2}{3}$



b) $k = -\frac{5}{6}$



Suoran yhtälön muodostaminen

62. **a)** $y = 5x - 1$ $(y - 4 = 5(x - 1))$

b) $y = 5x + 11$

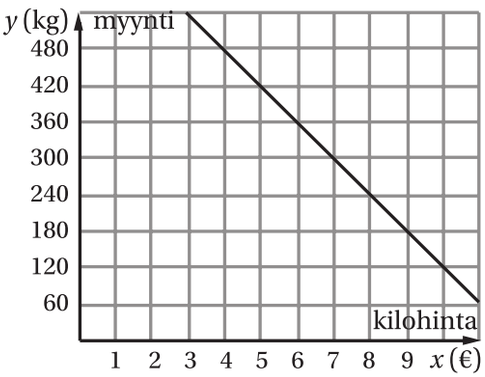
63. **a)** $y = -2x + 2$ **b)** $y = \frac{1}{6}x - \frac{9}{2}$

64. $y = 3x + 1$

a) Ei ole. **b)** On.

65. **a)** $y = -5$ **b)** $x = 6$

66. $y = -\frac{2}{3}x + 7$

67. 

a) -60

b) $y = -60x + 720$ $(y - 300 = -60(x - 7))$

c) 220 kg

(Lausekkeeseen $-60x + 720$ sijoitetaan $x = 8{,}30$.)

d) 5,30 euroa

68. **a)** $y = 2{,}5x + 20$

(Yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen $(4, 30)$ kautta ja jonka kulmakerroin on $2{,}5$.)

b) 40 pistettä

c) 32 tuntia

69. **a)** $y = -0{,}22x + 3{,}42$

b) 1,7 °C

c) lokakuun 16. päivänä

70. **a)** $y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}$

b) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ $\left(y = \frac{-4x + 6}{3}\right)$

71. **a)** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{12}$

(symbolinen laskin: $y = \frac{8x + 5}{12}$)

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{12}$ $\left(y = \frac{-(8x - 13)}{12}\right)$

72. **a)** $y = 3x - 4$ **b)** $y = -x + 8$

73. **a)** $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{7}{11}x$

74. **a)** $y = 5$ **b)** $x = -4$

c) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

75. Tapaa.

(Piste $(8, 15)$ on pisteen $(-3, 4)$ kautta kulkevalla suoran $y = x - 12$ suuntaisella suoralla.)

76. **a)** $y = 2x - 120$

b) 4

c) 90,5 m

77. $y = 5{,}5x + 83$

a) 154,5 cm

b) 10 vuotta 4 kuukautta

c) 49-vuotiaana

78. **a)** $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}$

b) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{18}$

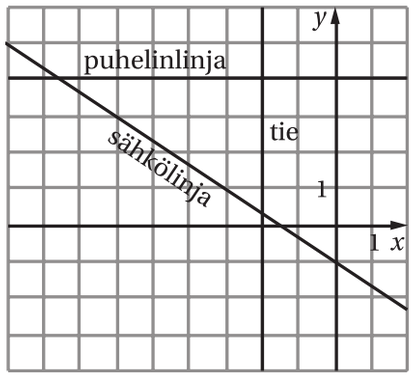
Suorien leikkauspiste

79. **a)** $(4, 7)$ **b)** $(-\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3})$

80. **a)** $(3, 0)$ **b)** $(-\frac{1}{3}, 0)$

81. pisteessä $(28, 74)$
(Suoran s yhtälö on $y = -3x + 158$ ja suoran t yhtälö $y = 4x - 38$.)

82. **a)**



b) pisteessä $(-2, \frac{1}{3})$
(Suoran yhtälöön $y = -\frac{2}{3}x - 1$ sijoitetaan $x = -2$.)
c) pisteessä $(-7{,}5; 4)$
(x-koordinaatti ratkaistaan yhtälöstä $-\frac{2}{3}x - 1 = 4$.)

83. Kolmion ABC pinta-ala on 10.
(Kanta $AB = 4$ ja vastaava korkeus on 5.)
Kolmion DEF pinta-ala on 10.
(Kanta $DE = 5$ ja vastaava korkeus on 4.)

84. 54 (Suorien leikkauspisteen x-koordinaatti on -6.)

85. **a)** Suora $y = 3x + 1$ pisteessä $(-\frac{1}{3}, 0)$, ja suora $y = -2x + 6$ pisteessä $(3, 0)$.
b) $\frac{20}{3}$

86. 116 ha
(Suorien leikkauspisteen y-koordinaatti on 6,8. Yhden koordinaatiston ruudun pinta-ala luonnossa on 4 ha.)

87. kärkipisteet $(0, -3)$, $(4, 3)$ ja $(-2, 1)$, pinta-ala 14
(Pinta-alan laskemista varten kolmio kehystetään suorakulmiolla.)

88. **a)** $(3, 6)$
b) $(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ eli $(-1{,}5; -0{,}5)$

89. **a)** $(14, 0)$ **b)** $(-2\frac{1}{3}, 0)$

90. **a)** $(0, -2)$
(Suoran yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x - 2$.)
b) $(-6, 1)$
c) $(-4, 0)$
d) $(-16, 6)$

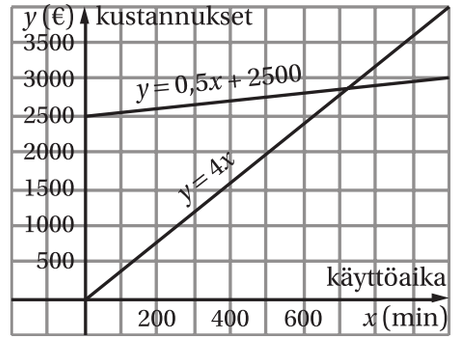
91. Kolmion ABC pinta-ala on 9 ja kolmion DEF 4,5.

92. **a)** 6 **b)** 4

93. 14 ha
(Yhden koordinaatiston ruudun pinta-ala luonnossa on 0,25 ha.)

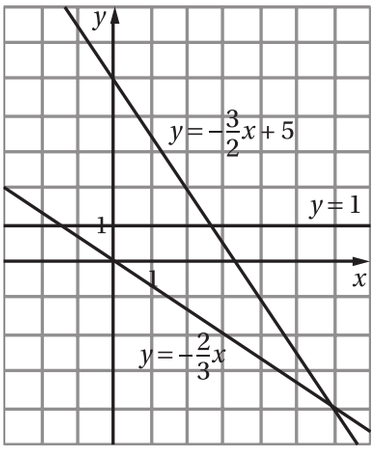
94. $\frac{1}{4}$

95.



Kun käyttöä on vähintään 715 minuuttia vuodessa.

96. a)



kärkipisteet $(\frac{8}{3}, 1)$, $(6, -4)$ ja $(-\frac{3}{2}, 1)$

(Kun yhtälö $-\frac{3}{2}x+5=1$ kerrotaan luvulla 2, saadaan yhtälö $-3x+10=2$.
Kun yhtälö $-\frac{3}{2}x+5=-\frac{2}{3}x$ kerrotaan luvulla 6, saadaan yhtälö $-9x+30=-4x$.)

b) $\frac{125}{12}=10\frac{5}{12}$

(Kannaksi valitaan suoralla $y=1$ oleva kolmion sivu, jonka pituus on $\frac{8}{3}-(-\frac{3}{2})=\frac{25}{6}$. Kolmion korkeus on silloin 5.)

97. kärkipisteet $(3, -1)$, $(1, 2)$ ja $(-2, 0)$, pinta-ala 6,5

Kahden pisteen määräämä suora

98. a) $y=3x-1$
b) $y=-2x+4$
c) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

99. a) $y=5$ **b)** $x=2$

100. a) $(9, 10)$ **b)** $(6\frac{1}{2}, 0)$

(Suoran yhtälö on $y=4x-26$.)

101. a) 0,6 **b)** $y=0{,}6x+10$
c) 130 osanottajaa

102. 80 myyjää

(Jos x on myyjien lukumäärä ja y myytyjen lippujen määrä, niin $y=4x+80$.)

103. $y=0{,}1258x+89{,}28$. Kulmakerroin ilmaisee kilowattitunnin hinnan 0,1258 €/kWh ja vakiotermi perusmaksun 89,28 euroa/vuosi.

104. 25. syyskuuta

(Jos x on päivän järjestysnumero alkaen syyskuun 1. päivästä ja y on vuorokauden keskilämpötila, niin riippuvuutta kuvaava suora kulkee pisteiden $(1; 14{,}0)$ ja $(31; 8{,}9)$ kautta.)

105. a) $C=\frac{5}{9}F-\frac{160}{9}$
b) Celsius 233
c) −13 °F
d) −40 astetta kummallakin asteikolla

106. a) Matti $y=4{,}2x+8$ ja Risto $y=3{,}8x+24{,}5$

(Matin suora kulkee pisteiden $(35, 155)$ ja $(40, 176)$ kautta ja Riston suora pisteiden $(35; 157{,}5)$ ja $(40; 176{,}5)$ kautta.)
b) Matti 3.05.13 ja Risto 3.04.50
c) 41,25 km:n kohdalla

107. a) $y=2x+1$
b) $y=-\frac{1}{3}x$
c) $y=-3$

108. a) $(4, 0)$ **b)** $(7, -9)$

(Suoran s yhtälö on $y=-3x+12$.)

109. $y=16x-10$, 390 jäätelöä

110. $y=0{,}2x+52$, 68 dB

111. $y=-400x+950$
a) 270 kg **b)** 1,88 euroa

112. **a)** $y = 6x + 79$
b) 121 cm ja 139 cm
c) 11 vuotta 10 kuukautta
d) 181 cm ja 199 cm
(Todellisuudessa vähän alle ja vähän yli 165 cm. Kasvu ei siis jatku lineaarisena.)
e) 79 cm
(Todellisuudessa 50 cm. Lineaarinen malli ei siis ole pätevä ikävuosien 4–13 ulkopuolella.)

113. **a)** 0,175
b) $y = 0{,}175x - 3667{,}5$
c) 848,60 euroa
d) 38 332 euroa

114. 10. kesäkuuta
(Lämpötilan y kesäkuun x. päivänä Sydneyssä ilmaisee yhtälö $y = -0{,}09x + 14{,}79$ ja Helsingissä yhtälö $y = 0{,}125x + 12{,}675$.)

Muutosprosentti ja muuttuneen arvon laskeminen

115. 4,6 % $\left(\frac{1{,}667}{1{,}593} \approx 1{,}046\right)$

116. **a)** 109,9 % **b)** 9,9 %

117. 4,6 % $\left(\frac{3{,}98}{4{,}17} \approx 0{,}954 = 95{,}4\ \%\right)$

118. **a)** 85,1 % **b)** 14,9 %

119. **a)** 1,25 **b)** 1,035
c) 2,2 **d)** 0,85
e) 0,946 **f)** 0,32

120. **a)** 299 euroa **b)** 37,70 euroa
c) 359 375 euroa
(Hinnat kerrotaan luvulla 1,15.)

121. **a)** 296 euroa **b)** 7,95 euroa
c) 1,147 miljoonaa euroa
(Hinnat kerrotaan luvulla 0,925.)

122. **a)** Nousee 9,6 %.
b) Nousee 50 %.
c) Nousee 100 %.
d) Alenee 6 %.
e) Alenee 40 %.
f) Alenee 0,8 %.

123. 623,70 euroa
$(1{,}08 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}05 \cdot 500{,}00)$

124. **a)** 17 181,05 euroa $(1{,}01065 \cdot 17\,000)$
b) 17 364,03 euroa $(1{,}01065 \cdot 1{,}01065 \cdot 17\,000)$

125. 3 970 euroa

126. **a)** 3 600 hiukkasta kuutiosenttimetrissä
$(0{,}15 \cdot 24\,000)$
b) 540 hiukkasta kuutiosenttimetrissä
$(0{,}15 \cdot 0{,}15 \cdot 24\,000)$

127. **a)** 90,8 % **b)** 9,2 %

128. 12,6 %

129. 15 %

130.

nestemäiset maitovalmisteet	vähentynyt	38 %
ruis	vähentynyt	77 %
voi	vähentynyt	64 %
kahvi	lisääntynyt	33 %
alkoholijuomat	lisääntynyt	620 %

131. **a)** 954 euroa
b) 1 782 euroa
c) 4 779 euroa
(Palkat kerrotaan luvulla 1,03.)

132. **a)** 20,80 euroa
b) 128,70 euroa
c) 974,35 euroa
(Hinnat kerrotaan luvulla 0,65.)

133. **a)** Suurenee 95 %.
b) Suurenee 1,5 %.
c) Pienenee 5 %.
d) Pienenee 90,5 %.
e) Pienenee 95 %.

134. 7 300 euroa

135. Ville 2 909,47 euroa,
Kaisa 3 360,43 euroa,
Anneli 3 704,54 euroa

Prosenttilausekkeita

136. **a)** $0{,}5p$ **b)** $0{,}25x$
c) $0{,}9a$

137. **a)** $1{,}3a$ **b)** $1{,}05a$
c) $1{,}012a$ **d)** $2a$

138. **a)** $0{,}7a$ **b)** $0{,}95a$
c) $0{,}988a$ **d)** $0{,}22a$

139. **a)** 125 euroa (yhtälö $1{,}12x = 140$)
b) 250 euroa (yhtälö $0{,}64x = 160$)

140. **a)** Kasvanut 4 %.
b) Kasvanut 40 %.
c) Vähentynyt 6 %.
d) Vähentynyt 60 %.
e) Vähentynyt 96 %.

141. 28,8 %
(Jos hinta vuoden alussa on h, niin vuoden lopussa hinta on $1{,}15 \cdot 1{,}12h = 1{,}288h$.)

142. **a)** Nousee 4 %.
b) Nousee 4 %.
c) Alenee 9 %.

143. Molemmilla tavoilla 24 %:n alennuksen. Alennusten järjestys ei vaikuta lopputulokseen, koska $0{,}8 \cdot 0{,}95h = 0{,}95 \cdot 0{,}8h$.

144. 58 %

145. 36 %

146. 13,7 %

147. **a)** 78 % $\left(\frac{0{,}87b}{1{,}12b} = \frac{0{,}87}{1{,}12} \approx 0{,}78\right)$
b) 22 % $\left(\frac{b}{0{,}82b} = \frac{1}{0{,}82} \approx 1{,}22\right)$
c) 26 % $\left(\frac{b}{1{,}35b} = \frac{1}{1{,}35} \approx 0{,}74\right)$

148. 20,3 %
(Olkoon ensimmäisen vuoden liikevaihto a, jolloin toisen vuoden liikevaihto oli $1{,}185a$, kolmannen $1{,}425a$, ja $\frac{1{,}425a}{1{,}185a} \approx 1{,}203$.)

149. 14 %
(Jos veroton hinta on a, niin verollinen hinta oli ennen $1{,}08a$ ja veroprosentin korotuksen jälkeen $1{,}23a$.)

150. **a)** $1{,}23p$ **b)** $0{,}937p$

151. **a)** 820 euroa
(Jos entinen vuokra on x, niin $1{,}05x = 861$.)
b) 1 450 euroa
(Jos entinen vuokra on x, niin $0{,}92x = 1\,334$.)

152. **a)** Laskenut 13 %.
b) Noussut 2,8 %.
c) Noussut 10 %.

153. **a)** 1,42 %
(Jos talletuksen suuruus on a, niin korko on $0{,}02a$. Korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on $0{,}71 \cdot 0{,}02a = 0{,}0142a$.)
b) 1,6685 %

154. **a)** Alenee 2,5 %.
b) Alenee 10 %.

155. **a)** 55 % **b)** 60 % **c)** 75 %

156. 250 euroa
(Jos alkuperäinen hinta on x, niin $0{,}6 \cdot 0{,}7x = 105$.)

157. 29,9 %

158. 12,5 %
(Olkoon alkuperäinen hinta a. A:n alennettu hinta on $0{,}7a$ ja B:n alennettu hinta $0{,}8a$.)

159. **a)** 9,1 %
(Jos veroton hinta on a, niin vero on $0{,}1a$ ja verollinen hinta $1{,}1a$. Koska $\frac{0{,}1a}{1{,}1a} \approx 0{,}091$ = 9,1 %, niin vero on 9,1 % hinnasta.)
b) 12,3 % **c)** 19,4 %

160. **a)** Vaihtoehdon B mukainen loppupalkka on 1,2 % vaihtoehdon A mukaista palkkaa suurempi.
(Jos vuosipalkka ennen sopimuskauden alkua on a, niin sopimuskauden lopussa vuosipalkka on vaihtoehdon A mukaan $1{,}21a$ ja vaihtoehdon B mukaan noin $1{,}225a$.)
b) Vaihtoehdon A mukaan saa 5,5 % enemmän kuin vaihtoehdon B mukaan.
(Lasketaan yhteen kummankin vaihtoehdon mukaiset kolme seuraavaa vuosipalkkaa. Vaihtoehdon A mukaan saadaan $3{,}63a$ ja vaihtoehdon B mukaan noin $3{,}44a$.)

Potenssi

161. **a)** 343 **b)** 117 649

162. **a)** a^6
b) x^3
c) x^8
d) $36a^2b^6$
e) $\frac{a^2}{25}$

163. **a)** $b^3 \cdot b^5 = b^8$
b) $\frac{x^{10}}{x^2} = x^8$
c) $(ab^3)^4 = a^4b^{12}$
d) $\left(\frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{9x^2}{16}$

164. **a)** 5^{14} **b)** 5^{13} **c)** 5^{15}

165. **a)** $6{,}5 \cdot 10^{10} = 65\,000\,000\,000$ eli 65 miljardia
b) $9{,}3 \cdot 10^{14} = 930\,000\,000\,000\,000$ eli 930 biljoonaa

166. **a)** 7,35 miljardia, $7{,}35 \cdot 10^9$
b) 92 tuhatta biljoonaa, $92 \cdot 10^{15}$ tai $9{,}2 \cdot 10^{16}$

167. $1{,}1 \cdot 10^{15}$ eli 1 100 biljoonaa

168. 1 au $\approx 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m $= 1{,}50 \cdot 10^8$ km

169. $3^{206} \approx 1{,}9 \cdot 10^{98}$ ja $5^{137} \approx 5{,}7 \cdot 10^{95}$.
Luku 3^{206} on suurempi.
Luvussa 3^{206} on 99 numeroa, ja luvussa 5^{137} on 96 numeroa.

170. 21 000 m^2 $\left(\frac{150 \cdot 10^{12}}{7{,}1 \cdot 10^9}\right)$

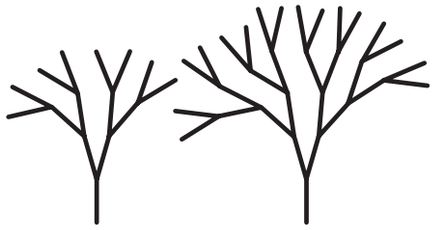
171. 83 vuodeksi

172. $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km, 270 000-kertainen

173. **a)** noin $9{,}22 \cdot 10^{18}$ jyvää
b) $2{,}9 \cdot 10^{11}$ tonnia (290 miljardia tonnia)
c) 410 vuoden

174. **a)** 25
b) 125
c) noin 9,8 miljoonaa
d) noin $9{,}5 \cdot 10^{13}$ eli noin 95 000 miljardia
e) 13 000 kirjettä

175. **a)**



b) 1 024

176. **a)** $21a^{10}$ **b)** x^4 **c)** b^{19}

177. **a)** $(5x \cdot x^4)^3 = 125x^{15}$
b) $\left(\frac{6x^4}{3x}\right)^5 = 32x^{15}$

178. **a)** 7^{25} **b)** 7^7 **c)** 7^{10}

179. **a)** 5 000 000 000, 5 miljardia
b) 198 000 000 000, 198 miljardia
c) 320 000 000 000 000 000, 320 000 biljoonaa

180. **a)** 1 118 000 000 m^2 eli $1{,}118 \cdot 10^9$ m^2
b) 206 m^2 **c)** 0,16 m^2

181. $5{,}05 \cdot 10^8$ sekuntia

182. 7^{75} on suurempi.
Luvussa 7^{75} on 64 numeroa ja luvussa 8^{65} 59 numeroa.

183. **a)** 4
b) 8
c) 1 024
d) noin 550 miljardia
(Maapallon väkiluku 1000-luvun alussa oli noin 300 miljoonaa, joten tuolloin elänyt maapallon asukas on Sarin esivanhempi keskimäärin kahden tuhannen sukuhaaran kautta.)

184. **a)** Yltää, sillä taitetun arkin korkeus on 120 m.
b) 850-kertainen

185. 45 vuodeksi

186. 38 880 euroa
(Eero saisi rahaa $6^5 = 7\,776$ henkilöltä. Jotta myös nämä kukin saisivat rahansa, tarvitaan $7\,776 \cdot 7\,776 \approx 60$ miljoonaa lähettäjää. Ketjukirjeen liikkeelle laskevat ehkä saisivat hyväuskoisilta vastaanottajilta rahaa, mutta myöhemmin ketjuun joutuneille ei uusia rahanlähettäjiä enää riittäisi.)

Eksponentiaalinen kasvaminen ja väheneminen

187. **a)** 28,8 **b)** 33,1
c) 134 **d)** 3 330

188. **a)** 1,1 mm **b)** 1,3 mm
c) 1,9 mm **d)** 21 cm

189. **a)** 1 160,54 euroa
(Sijoituksen arvo tulee joka vuosi 1,015-kertaiseksi.)
b) 1 967,15 euroa

190. **a)** 14 mikrogrammaa
b) 1,9 mikrogrammaa

191. noin 5 800 peuraa

192. **a)** 17 %

b) 1 200 kg ja 21 kg

(Suolan määrä tulee joka viikko $\frac{2\ 000}{2\ 400} = 0{,}83333\ldots$ -kertaiseksi. a-kohdan tulos oli pyöristetty lähtötietojen mukaiseen kahden numeron tarkkuuteen. Jotta välituloksen pyöristys ei vääristäisi lopputulosta, b-kohdan laskuissa kannattaa käyttää lauseketta $\frac{2\ 000}{2\ 400}$ tai tarkempaa likiarvoa 0,8333. Jos b-kohdassa olisi käytetty likiarvoa 0,83, jälkimmäiseksi tulokseksi olisi tullut 19 kg.)

193. **a)** 13 %

(Jos palkka ajanjakson alussa on a, niin kahdeksan vuoden kuluttua palkka on $1{,}015^8\,a$.)

b) 37 %

194. 43 %

195. $\frac{1}{64}$ eli 1,6 %

($\left(\frac{1}{2}\right)^6 a = \frac{1}{64}\,a$ tai $0{,}5^6\,a = 0{,}015625a$, missä a on piirakan alkuperäinen koko.)

196. 27 %

197. **a)** 10,50 euroa vuonna 2016 ja 14,70 euroa vuonna 2030

(Hinta nousee 0,30 euroa joka vuosi.)

b) 10,70 euroa vuonna 2016 ja 17,10 euroa vuonna 2030

(Hinta tulee joka vuosi 1,0345-kertaiseksi.)

198. **a)** 35 °C **b)** 14,5 °C

(Jälkiruoan ja ulkoilman lämpötilaero pieneni tunnissa 80 °C:sta 45 °C:een, joten tunnin kuluttua lämpötilaero on $\frac{45}{80} = 0{,}5625 = 56{,}25$ % alkuperäisestä. Lämpötilaero tulee joka tunti 0,5625-kertaiseksi.)

199. **a)** 56 cm, 58 cm ja 61 cm

b) 222 cm (Kasvu ei siis jatku eksponentiaalisena.)

200. **a)** 12,5 cm **b)** 7,2 cm **c)** 0,5 cm

(Kun kuviota on pienennetty esimerkiksi 5 kertaa, korkeus on $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 18$ cm.)

201. 2 500,62 euroa

202. 37 euroa

203. **a)** 990 000

b) 35 miljoonaa

(Suomen väkiluku vuonna 2000 oli 5,1 miljoonaa.)

204. 3 400 hiukkasta

(Jokainen suodatin 0,7-kertaistaa hiukkasten määrän.)

205. 9 500 000 euroa

206. 988 miljoonaa

(Ennuste piti hyvin paikkansa, sillä Intian väkiluku ylitti miljardin vuonna 2000.)

207. 13 %

(Jos väkiluku jonakin vuonna on a, niin kymmenen vuotta myöhemmin väkiluku on $1{,}012^{10}\,a \approx 1{,}13a$.)

208. **a)** 77 % **b)** 27 %

209. 107 %

(Olkoon lainapääoma a. Vuoden kuluttua lainaa on $1{,}002^{365} \cdot a \approx 2{,}07a$.)

210. **a)** 1 yksikkö

b) 1,1 yksikköä

c) 0,38 yksikköä

(Väestön määrä tulee joka vuosi 1,03-kertaiseksi, ja ravinnon määrä kasvaa joka vuosi 5 000 yksikköä.)

211. **a)** 16 °C **b)** 6 °C

212. 60 °C

Negatiivinen eksponentti

213. **a)** 1 **b)** $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{49}$ **d)** $\frac{1}{81}$
e) 1
(Vastaukseksi on annettava tarkka arvo, ei likiarvo.)

214. **a)** 6,0 **b)** 49 000 000

215. **a)** 99 miljoonaa euroa
b) neljä vuotta sitten 16 miljoonaa euroa ja kuusi vuotta sitten 9,3 miljoonaa euroa
(Myynnin arvo neljä vuotta sitten voidaan laskea negatiivisen eksponentin avulla: $1{,}3^{-4} \cdot 45$ tai yhtälön avulla: $1{,}3^4 \cdot x = 45$, josta $x = \frac{45}{1{,}3^4}$.)

216. 4,3 miljardia
(Maapallon väkiluku vuonna 1970 oli 3,7 miljardia. Väkiluvun vuotuinen kasvu oli vielä 1970-luvulla 1,8 %.)

217. **a)** 1 485 euroa **b)** 1 107 euroa

218. **a)** 0,000 01 **b)** 0,000 618
c) 0,000 000 20

219. **a)** 0,000 000 239
b) 0,000 003 18
c) 0,000 000 001 64

220. 5 700-kertainen

221. **a)** 120 kg **b)** 2,0 kg

222. **b)** 57,6 kg
(Yhtälö $\frac{x}{1{,}67 \cdot 10^{-24}} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{33}}{x}$ kerrotaan ristiin.)

223. **a)** $\frac{1}{12}$ **b)** 1
c) $\frac{1}{216}$ **d)** $\frac{1}{729}$

224. **a)** $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{49}$

225. 780 miljoonaa
(Intian väkiluku vuonna 1980 oli 630 miljoonaa. Väkiluvun kasvu on vuoden 1980 jälkeen hidastunut.)

226. **a)** 78 000 miljoonaa eli 78 miljardia
b) 13

227. 370 mg

228. **a)** 0,000 000 035 6
b) 0,000 000 880

229. **a)** protonin **b)** 1900-kertainen

230. 1,9 cm

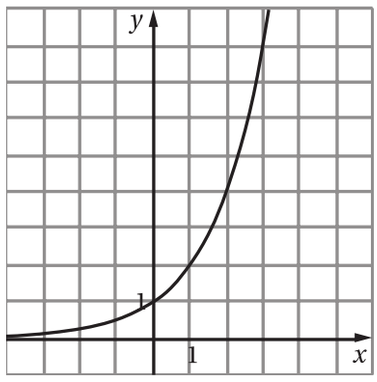
231. 5 g
(Suomella ja Ruotsilla on erikoislupa myydä liikaa dioksiinia sisältävää silakkaa ja lohta.)

Eksponenttifunktio

232. **a)** 22 **b)** 0,56 **c)** 0,013

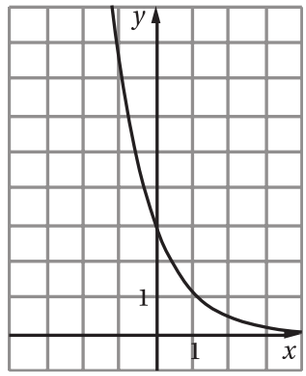
233.

x	$f(x) = 2^x$
3	8
2	4
1	2
0,5	1,4
0	1
−0,5	0,71
−1	$\frac{1}{2}$
−2	$\frac{1}{4}$



234.

x	$g(x) = 0{,}4^x \cdot 3$
4	0,08
2	0,48
1	1,2
0,5	1,90
0	3
−1	7,5



Kun muuttujan x arvot suurenevat, funktion arvot pienenevät.

235. $b(x) = 7{,}9^x \cdot 7\,500$

a) 10 miljoonaa **b)** 43

236. $m(x) = 3{,}28 \cdot 0{,}977^x$

a) 2,31 kg **b)** 3,40 kg

237. **a)** 200 hiukkasta/cm^3

b) 16 000 hiukkasta/cm^3

238. **a)** 53 g (45 minuuttia on $\frac{45}{60}$ tuntia.)

b) 140 g

239. 58 %

240. 96 %

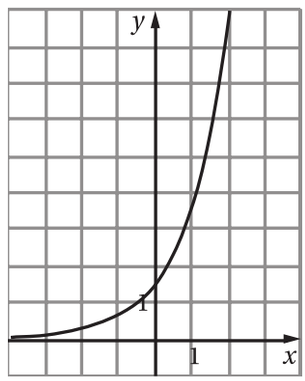
(Vuorokaudessa on $24 : 5 = 4{,}8$ viiden tunnin jaksoa.)

241. **a)** 0,49 **b)** 0,94

c) 1,2 **d)** 4,9

242.

x	$f(x) = 1{,}5 \cdot 2{,}4^x$
2	8,64
1	3,6
0,5	2,32
0	1,5
−0,5	0,97
−1	0,63
−3	0,11



Kun muuttujan x arvot suurenevat, myös funktion arvot suurenevat.

243. **a)** 4 200 **b)** 270

244. $m(x) = 3^x \cdot 250$

a) 11,7 kg **b)** 16 g

c) 400 g

(Kymmenen tuntia on $\frac{10}{24}$ vuorokautta.)

d) 170 g

245. **a)** 3 800 (20 minuuttia on $\frac{1}{3}$ tuntia.)

b) 7 500

c) 480

246. **a)** 17 % **b)** 1,8 mg

c) 480 mg

247. **a)** 31 % **b)** 11 %

(Jokainen senttimetri lasia päästää lävitseen 75 % siihen tulevasta valosta eli 0,75-kertaistaa valon määrän.)

248. 2,9-kertainen

(Henkilön A kolesterolitaso on 2,3 mmol/l suurempi kuin henkilön B. Koska $\frac{2{,}3}{1{,}5} \approx 1{,}53$, niin henkilön A sairastumisriski on $2^{1{,}53}$-kertainen.)

Logaritmi

249. **a)** 12 **b)** 2

c) 1 **d)** 0

250. **a)** 4, 2 ja −3

b) 1 000 000 ja 0,01

251. **a)** 625 (5^4) **b)** 25

c) 5 **d)** $\frac{1}{5}$

252. **a)** 11 **b)** 3

c) 1

253. **a)** 9 **b)** 4

c) 0 **d)** −1

254. **a)** $a = 243$ (3^5) **b)** $a = 216$

255. **a)** 61 700 $(10^{4{,}79})$ **b)** 0,0324

256. **a)** 1,9
b) $4{,}4 \cdot 10^{-13}$ $\left(\lg x = \dfrac{-2{,}1}{0{,}17}\text{, joten } x = 10^{\frac{-2{,}1}{0{,}17}}.\right)$
c) arvolla $x \approx 51\,000$

257. **a)** ISO 400/27° ja ISO 2000/34°
(Jos $S = 400$, niin $S° = 1 + 10 \lg 400$.)
b) ISO 40/17° ja ISO 3200/36°
(Jos $S° = 17$, niin $1 + 10 \lg S = 17$.)

258. **a)** 21 000 MWh, 24 tunnissa
(yhtälö $3{,}2 + 0{,}67 \lg E = 6{,}1$)
b) 21 000-kertainen

259. **a)** −1,4 richteriä
($M = 3{,}2 + 0{,}67 \lg (0{,}15 \cdot 10^{-6})$)
b) 1,9 richteriä
c) 1,2 miljoonan

260. **a)** 7 **b)** 3
c) 1 **d)** 0

261. **a)** $6^5 = 7\,776$ **b)** $6^{-4} = \dfrac{1}{1\,296}$

262. **a)** 100 000 **b)** 0,001

263. **a)** 14, 3, 1 ja 0
b) $a = 78\,125$

264. **a)** 1,23 ja −1,34
b) $a \approx 32\,400$

265. **a)** 1,5 **b)** 0,17

266. **a)** 2 800 **b)** 23 845

267. **a)** −5 – −4
b) 0,0625 – 0,125 mm

268. **a)** 60 dB **b)** 110 dB
c) 140 dB

269. **a)** 10^{-12} W/m^2 **b)** −20 dB
c) $3{,}2 \cdot 10^{-7}$ W/m^2

270. 300 metrin etäisyydellä

Logaritmin sovelluksia

271. luku 10^{1310}
(Luvun 10^{1310} 10-kantainen logaritmi on 1310 ja luvun 12^{1210} noin 1306.)

272. **a)** $x \approx 1{,}63$ **b)** $x \approx 12{,}9$

273. 3^{15}
(Eksponenttiyhtälön $3^x = 10\,000\,000$ ratkaisu on $x \approx 14{,}7$.)

274. **a)** $x \approx 4{,}78$ **b)** $x \approx 14{,}9$

275. 17 vuodessa
(yhtälö $1{,}0288^x \cdot 5\,000 = 8\,000$)

276. vuonna 2036

277. kymmenellä kopioinnilla

278. 14 vuodessa
(Jos loukkaantuneiden määrä nyt on a, niin x vuoden kuluttua loukkaantuneiden määrä on $0{,}95^x\,a$. Määrän a tulee vähetä määrään $0{,}5a$.)

279. 99 vuoden kuluttua

280. 6,6 cm
(Olkoon a hiukkasten määrä suodattamattomassa ilmassa. 1,0 cm paksuisen suodattimen läpi pääsee 35 % siihen tulevista hiukkasista, joten x cm paksun suodattimen läpi pääsevien hiukkasten määrä on $0{,}35^x\,a$. Määrän a tulee vähetä määrään $0{,}001a$.)

281. **a)** 47,6 mg **b)** vuonna 2145

282. 53 vuodessa

283. $3^{3002} > 5^{2002} > 2^{4002}$

284. **a)** $x \approx 9{,}0$ **b)** $x \approx 460$

285. **a)** $x \approx 10$ **b)** $x \approx 9{,}2$

286. 12 kopioinnilla

287. vuoden 2041 aikana

288. **a)** 18 vuodessa
(Merkitään alkuperäistä pääomaa esimerkiksi a.)
b) 8 vuodessa

289. 14 vuodessa

290. **a)** 34 vuorokaudessa
b) 23 000 vuodessa
(Tulokset on pyöristetty normaaleilla pyöristyssäännöillä kahden numeron tarkkuuteen.)

291. 18 viikossa
(Myrkyn määrä järvessä tulee joka viikko 0,85-kertaiseksi. Jos myrkyn määrä nyt on a, niin x viikon kuluttua myrkyn määrä on $0{,}85^x\, a$.)

292. **a)** 2,4 %
(Jokainen desimetri vettä 0,95-kertaistaa siihen tulevan valon määrän. Jos veteen tulevan valon määrä on a, niin x desimetrin jälkeen valosta on jäljellä $0{,}95^x\, a$.)
b) 3,7 m:n syvyydessä

293. vuosi 2021

Korkeammat juuret ja potenssiyhtälö

294. **a)** $\sqrt[7]{2187} = 3$, tarkistus: $3^7 = 2\,187$
b) $\sqrt[6]{4096} = 4$, tarkistus: $4^6 = 4\,096$
c) $\sqrt[3]{-2744} = -14$, tarkistus: $(-14)^3 = -2\,744$

295. **a)** 2,08 **b)** 1,42

296. 21,5 cm ($10\text{ l} = 10\text{ dm}^3$)

297. **a)** $x \approx 1{,}50$ tai $x \approx -1{,}50$
b) $x \approx 1{,}84$
c) $x \approx 1{,}41$ tai $x \approx -1{,}41$

298. 150 s
(Verenkiertoaikojen suhde on yhtä suuri kuin massojen neljänsien juurien suhde.)

299. 3,09 %
(Yhtälöstä $k^6 \cdot 4\,500 = 5\,400$ saadaan korkokerroin $k \approx 1{,}0309$.)

300. 2,3 %

301. 9,4 %

302. 5,4 %

303. 21 %

304. **a)** On ratkaistu k yhtälöstä $k^{10}\, p = 2{,}4p$, missä p on palkka, ja saatu $k \approx 1{,}091$. Jos 140 %:n kasvu jaetaan tasaisesti jokaiselle vuodelle niin, että kasvu on joka vuosi yhtä monta prosenttia, vuosikasvu on 9,1 %.
b) 6,7 %

305. $4{,}51 \cdot 10^8$ km
(Maa kiertää Auringon yhdessä Maan vuodessa. Etäisyyksien kuutioiden suhde on yhtä suuri kuin kiertoaikojen neliöiden suhde.)

306. **a)** $\sqrt[9]{512} = 2$, tarkistus: $2^9 = 512$
b) $\sqrt[4]{100\ 000\ 000} = 100$,
tarkistus: $100^4 = 100\ 000\ 000$
c) $\sqrt{1024} = 32$, tarkistus: $32^2 = 1\ 024$

307. **a)** $x \approx 2{,}96$
b) $x \approx 0{,}977$ tai $x \approx -0{,}977$

308. 5,8 cm ($1\ \text{dl} = 0{,}1\ \text{l} = 0{,}1\ \text{dm}^3 = 100\ \text{cm}^3$)

309. 29 %
(Jäljelle jääneen ja alkuperäisen lajimäärän suhde on yhtä suuri kuin pinta-alojen 300 ja 1 200 neljänsien juurien suhde.)

310. 10,5 m/s

311. vähintään 8,45 %

312. 10,1 %

313. 6,5 %

314. 4,7 %

315. 16 %

316. **a)** 50,7 %
b) 8,5 %

Eksponentiaalisen mallin sovelluksia

317. **a)** 10,7 %
(Jos liikevaihto tulee joka vuosi k-kertaiseksi, niin $k^4 \cdot 16 = 24$. Ratkaisemalla potenssiyhtälö saadaan $k \approx 1{,}1067$.)
b) vuonna 2026
(Olkoon x vuodesta 2008 kulunut aika. Ratkaistaan eksponenttiyhtälö $1{,}1067^x \cdot 16 = 100$.)

318. vuosi 2009
(Kasvu on hidastunut, sillä Afrikan väkiluku ylitti miljardin vuonna 2012.)

319. 38-kertaiseksi
(Väkiluku tulee joka vuosi noin 1,037-kertaiseksi.)

320. **a)** 4,5 %
(Jos aineen määrä alussa on a ja määrä tulee joka vuorokausi k-kertaiseksi, niin $k^{15} \cdot a = 0{,}5a$. Yhtälöstä saadaan $k \approx 0{,}9548$.)
b) 17 %
c) 100 vuorokaudessa

321. Kasvu on ollut 42 % vuodessa. Laki pitää paikkansa.
(Mooren laki on osittain niin sanottu itsensä toteuttava ennuste, sillä mikropiirien valmistajat asettavat sen pohjalta kehittämistavoitteensa.)

322. **a)** 1 tunti 33 minuuttia
(Kun vuodesta 2007 on kulunut x vuotta, niin työmatkaan kuluva aika on $42 + 3{,}2x$ minuuttia.)
b) 1 tunti 58 minuuttia
(Kun vuodesta 2007 on kulunut x vuotta, niin työmatkaan kuluva aika on $1{,}0667^x \cdot 42$ minuuttia.)

323. **a)** 14 %
(Isotoopin määrä tulee joka vuosi noin 0,9998755-kertaiseksi (eli pienenee 0,01245 %). Likiarvossa tulee olla tarpeeksi yhdeksikköjen jälkeen tulevia desimaaleja, sillä vasta ne kuvaavat riittävän tarkasti vähenemisnopeutta.)
b) n. vuodelta 1500 ennen ajanlaskun alkua

324. 8,7 miljardia
(Maapallon väkiluku vuonna 2012 oli 7 miljardia.)

325. **a)** 1,7 %
b) 23 vuodessa
(b-kohdan tulos laskettiin käyttämällä kasvukertoimelle k a-kohdan tulosta tarkempaa likiarvoa 1,01748.)

326. 44 %
(Suodattimeen tulevasta hiekan määrästä h tulee kahdeksan suodattimen jälkeen olla jäljellä määrä $0{,}01h$.)

327. 5 700 g, kaksivuotiaana

328. **a)** 4,4 % **b)** 16 vuodessa

329. 45 vuorokauden kuluttua

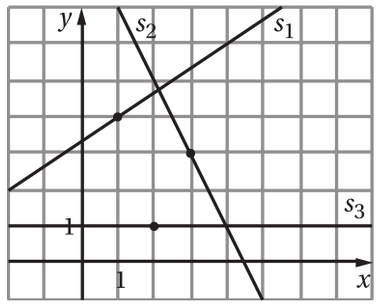
330. **a)** 8 200 **b)** 150 000

Kertaustehtäviä

331. **a)** suora
b) 80 km
(Liisa pyöräilee 16 km joka tunti.)
c) kello 17

332. **a)** x-koordinaatti on marraskuun päivän päivämäärä ja y-koordinaatti öljyn määrä litroina.
b) Öljyä kuluu joka päivä yhtä paljon.
c) Öljy loppuu 18.11.

333. Suoran s_1 kulmakerroin on 0.
Suoran s_2 kulmakerroin on $\frac{1}{2}$.
Suoran s_3 kulmakerroin on 1.
Suoran s_4 kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$.

334.


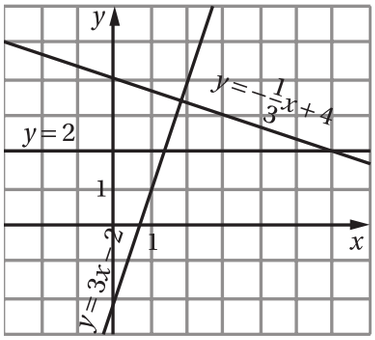
335. **a)** -200, laskeva
($k = \frac{2000-3400}{12-5}$ tai $k = \frac{3400-2000}{5-12}$)
b) $-\frac{1}{4}$, laskeva
c) $\frac{2}{3}$, nouseva

336. Eivät ole yhdensuuntaiset, sillä suorien kulmakertoimet $-\frac{3}{2}$ ja $-\frac{10}{7}$ eivät ole yhtä suuret.
Suora s_1 laskee jyrkemmin, sillä sen kulmakerroin $-\frac{3}{2}$ on pienempi.

337. kulmakerroin -1, pisteessä $(0, 6)$

338. On.
(Pisteen koordinaatit $x = 14$ ja $y = -37$ toteuttavat yhtälön.)

339.



340. **a)** $y = 4x$

b) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}$

$(y - (-6) = -\frac{2}{3}(x - (-1)))$

341. **a)** $y = 3$ **b)** $x = -4$

342. $y = -2x + 7$

Suoraa leikkaa x-akselin pisteessä $(3\frac{1}{2}, 0)$ ja y-akselin pisteessä $(0, 7)$.

(Suoran kulmakerroin on -2 ja yhtälö $y - (-1) = -2(x - 4)$. Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti on 0, joten leikkauspisteen x-koordinaatti ratkaistaan yhtälöllä $-2x + 7 = 0$.)

343. **a)** $y = 2x + 9$

(Suoran kulmakerroin on $k = \frac{7 - 1}{-1 - (-4)} = 2$. Yhtälö muodostetaan sijoittamalla kaavaan $y - y_1 = k(x - x_1)$ kumman tahansa suoralla olevan pisteen koordinaatit: $y - 1 = 2(x - (-4))$ tai $y - 7 = 2(x - (-1))$.)

b) $y = -\frac{1}{4}x + 80$

c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

344. $y = 7x + 11$, 29 pistettä

(Suora kulkee pisteiden $(0, 11)$ ja $(2, 25)$ kautta, joten suoran kulmakerroin on $\frac{25 - 11}{2 - 0} = 7$.)

345. **a)** $(5, 11)$ **b)** $(1\frac{3}{4}, 1\frac{3}{4})$

346. $(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$

(Ratkaistaan yhtälöpari symbolisella laskimella. Voidaan myös ratkaista ensin x-koordinaatti yhtälöstä $2x - 1 = -\frac{1}{4}x + 2$. Kun yhtälö kerrotaan luvulla 4, saadaan yhtälö $8x - 4 = -x + 8$.)

347. 27

(Kolmion kannaksi valitaan suorien x-akselista leikkaama jana. Suorat leikkaavat x-akselin pisteissä $(2, 0)$ ja $(5, 0)$, joten kannan pituus on 3. Kolmion korkeus on suorien leikkauspisteen y-koordinaatti 18.)

348. 54 %

($\frac{183}{119} \approx 1{,}538$, missä ajat on ilmaistu minuutteina.)

349. 34,2 %

350. 67,92 euroa $(0{,}85 \cdot 79{,}90)$

351. 2 404,25 euroa ja 3 314,29 euroa

$(1{,}037 \cdot 2\,318{,}47$ ja $1{,}037 \cdot 3\,196{,}04)$

352. 89 % pienempi

(Jos hankinta-arvo on a, niin arvo kolmen vuoden kuluttua on $0{,}05 \cdot 1{,}53 \cdot 1{,}47a$.)

353. 783 miljoonaa euroa

(Jos x on vuoden 2011 liikevaihto, niin $0{,}872x = 683$.)

354. **a)** a^6 **b)** b **c)** y^{20}

355. **a)** 125-kertaistuu.

(Tilavuus on $(5a)^3 = 125a^3$.)

b) Pienenee 27-osaan.

(Tilavuus on $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$.)

356. **a)** $-125x^3$ $((-5x)^3 = (-5)^3x^3)$

b) $\frac{x^4}{8}$ $(2\left(\frac{x}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{x^4}{2^4} = 2 \cdot \frac{x^4}{16})$

c) a^5b^6

d) a^2b^5

357. **a)** 380 000 000
b) 0,000 071 2

358. **a)** $8{,}00 \cdot 10^{10}$
b) $8{,}10 \cdot 10^{-6}$

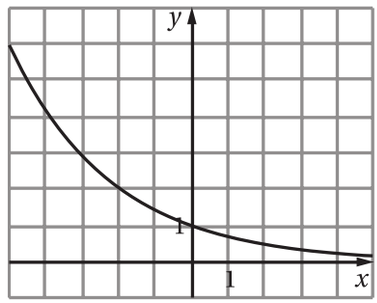
359. 0,27 s
($3{,}0 \cdot 10^8$ m/s = 300 000 km/s.
Kuluva aika on $\frac{80\ 000}{300\ 000}$ s.)

360. $6{,}0 \cdot 10^{24}$ $\left(\frac{2\ 380}{4{,}0 \cdot 10^{-22}}\right)$

361. 4 823 euroa $(1{,}045^{20} \cdot 2\,000)$

362.

x	$f(x) = 0{,}7^x$
3	0,34
1	0,7
0,5	0,84
0	1
−0,5	1,20
−1	1,43
−3	2,92



363. $m(x) = 2{,}9^x \cdot 130$
a) 3 200 g
b) 170 g $\left(x = \frac{1}{4} = 0{,}25\right)$
c) 26 g $(x = -1{,}5)$

364. 59 %
(Olkoon a lampeen valuneen myrkyn määrä. Myrkyn määrä tulee joka vuorokausi 0,965-kertaiseksi. Kun on kulunut 15 vuorokautta, myrkyn määrä on $0{,}965^{15}\, a \approx 0{,}59a$.)

365. **a)** 17 % **b)** 48 %
(Olkoon a lasiin tulevan lämpösäteilyn määrä. Jokainen senttimetri lasia 0,77-kertaistaa siihen tulevan lämpösäteilyn määrän. x cm:n paksuisen lasin läpi pääsevän lämpösäteilyn määrän ilmaisee funktio $s(x) = 0{,}77^x\, a$.)

366. **a)** 4 **b)** −1
c) 5

367. **a)** luvun 20 736 (12^4)
b) 0,000 72 $(10^{-3{,}14})$

368. **a)** 5 **b)** 11

369. **a)** 6 **b)** −3

370. **a)** 25,1 $(2^{4{,}65})$
b) 145 000 $(10^{5{,}16})$

371. **a)** 5,42 **b)** 0,0332

372. 8,9 richterin järistyksessä
$(3{,}2 + 0{,}67 \lg (380 \cdot 10^6))$

373. 6^{1628}
($\lg 8^{1401} \approx 1265$ ja $\lg 6^{1628} \approx 1267$)

374. **a)** $x \approx 1{,}4$
(Ratkaistaan symbolisella laskimella tai käyttäen potenssin logaritmikaavaa, jolloin saadaan $x = \frac{\lg\ 45}{\lg\ 15}$.)
b) $x \approx 12$
(Jos käytetään potenssin logaritmikaavaa, saadaan $x = \frac{\lg\ 500}{\lg\ 1{,}7}$.)

375. 2^{33} (yhtälö $2^x = 6 \cdot 10^9$)

376. 24 vuodessa
(Jos palkka nyt on a, niin x vuoden kuluttua palkka on $1{,}03^x\, a$. Yhtälöstä $1{,}03^x\, a = 2a$ jaetaan heti a pois.)

377. 12 vuoden kuluttua
(Yhtälö $1{,}75^x \cdot 200 = 200\,000$. Yhtälön ratkaisu $x \approx 12{,}3$ on pyöristetty normaaleilla pyöristyssäännöillä.)

378. 15 vuoden jälkeen
(Yhtälö $0{,}85^x\, a = 0{,}1a$, missä a on koneen hankinta-arvo.)

379. **a)** $x \approx 2{,}14$ tai $x \approx -2{,}14$

b) $x \approx 0{,}758$

380. 7,18 %

(Yhtälö $k^{10}\, a = 2a$, missä a on sijoitetun pääoman suuruus.)

381. 3,7 %

(yhtälö $k^8 \cdot 30\,000 = 40\,000$)

382. Tulevat 0,71-kertaiseksi.

(Yhtälö $k^6\, a = 0{,}13a$, missä a on kuvion alkuperäinen koko.)

383. **a)** 19 %

(Aineen alkuperäinen määrä a tulee joka vuorokausi kerrotuksi samalla luvulla k. Yhtälöstä $k^7\, a = 0{,}23a$ saadaan $k \approx 0{,}8106$.)

b) 19 vuorokaudessa

(Ratkaistaan eksponenttiyhtälö $0{,}8106^x\, a = 0{,}02a$.)

Sarja A

1. $y = 3x - 9$, piste $(20, 50)$ ei ole suoralla

(Leikkauspiste on $(2, -3)$. Suoran kulmakerroin on yhtä suuri kuin suoran $y = 3x - 2$ kulmakerroin 3. Pisteen $(20, 50)$ koordinaatit $x = 20$ ja $y = 50$ eivät toteuta suoran yhtälöä.)

2. 27 cm $\quad (0{,}8^{10} \cdot 2{,}5 \text{ m})$

3. 15.10.

(Lokakuun 1. päivästä marraskuun 1. päivään on 31 päivää. Keskilämpötilan muutos päivässä on $\frac{-6{,}7}{31} \approx -0{,}216$ °C. Voidaan muodostaa yhtälö keskilämpötilaa kuvaavalle suoralle, joka kulkee pisteiden $(1; 2{,}9)$ ja $(32; -3{,}8)$ kautta, ja ratkaista, missä pisteessä suora leikkaa x-akselin. Voidaan myös ratkaista yhtälöllä $2{,}9 - 0{,}216x = 0$, kuinka monen päivän kuluttua lokakuun 1. päivästä keskilämpötila on 0 °C. Yhtälöstä saadaan $x \approx 13{,}4$.)

4. **a)** 31 %

(Jos hinta alussa oli a, niin kolmen alennuksen jälkeen hinta oli $0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}9a = 0{,}6885a$.)

b) 300 euroa (yhtälö $0{,}6885a = 206{,}55$)

5. 5,92 %

(Korkokerroin k ratkaistaan yhtälöstä $k^5 \cdot 15\,000 = 20\,000$.)

6. 150

(Jokainen männänisku tekee kammiossa olevan kaasun määrän 0,97-kertaiseksi. Jos kaasun määrä alussa on a, niin x iskun jälkeen kaasun määrä on $0{,}97^x\, a$. Ratkaistaan yhtälö $0{,}97^x\, a = 0{,}01a$ logaritmin avulla. Vastaus on pyöristetty tavallisilla pyöristyssäännöillä kahden numeron tarkkuuteen.)

Sarja B

1. **a)** $y = 5x + 10$
(pisteiden $(14, 80)$ ja $(17, 95)$ kautta kulkeva suora)
b) 135 pulloa
c) $-2\,^\circ\text{C}$ (yhtälö $5x + 10 = 0$)

2. $\frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$
(Kolmion kannaksi valitaan suorien y-akselista erottama jana, jonka pituus on 4. Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari symbolisella laskimella. Voidaan myös ratkaista x-koordinaatti yhtälöllä $4x + 3 = \frac{1}{2}x - 1$, joka luvulla 2 kerrottuna tulee muotoon $8x + 6 = x - 2$. Leikkauspisteen x-koordinaatti on $-\frac{8}{7}$. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{7}$.)

3. **a)** 36 %
(Jos hinta alussa oli a, niin viiden vuoden kuluttua hinta oli $0{,}948 \cdot 0{,}869 \cdot 0{,}880 \cdot 0{,}928 \cdot 0{,}957a \approx 0{,}6438a$.)
b) 8,4 %
(Jos hinta olisi laskenut joka vuosi yhtä monta prosenttia, se olisi tullut viidessä vuodessa k^5-kertaiseksi. Ratkaistaan k yhtälöstä $k^5 a = 0{,}6438a$.)

4. Nelikulmion sivut BC ja AD ovat yhdensuuntaiset, sillä molempien kulmakerroin on $\frac{3}{2}$.

5. Kaavalla saadaan oikea kaksinkertaistumisaika 40 vuotta.
(Todellinen kaksinkertaistumisaika ratkaistaan yhtälöstä $1{,}0175^x\, a = 2a$ joko symbolisella laskimella tai potenssin logaritmikaavan avulla.)

6. 56 %
(Jos isotoopin määrä tulee joka vuosi k-kertaiseksi ja määrä alussa on a, niin $k^{29}\, a = 0{,}5a$, josta saadaan $k = 0{,}97638\ldots$. 24 vuodessa määrä tulee k^{24}-kertaiseksi.)

Sarja C

1. 1 800 yksilöä
(Voidaan suoraan laskea $1{,}18^{-5} \cdot 4\,200$ tai ratkaista yhtälö $1{,}18^5 \cdot x = 4\,200$.)

2. **a)** 138 km/h
(Jos x on mittarinlukema ja y on todellinen nopeus, niin muodostamalla pisteiden $(90, 100)$ ja $(50, 50)$ kautta kulkevan suoran yhtälö saadaan riippuvuutta kuvaava suora $y = 1{,}25x - 12{,}5$. Sijoitetaan $x = 120$.)
b) 34 km/h (yhtälö $1{,}25x - 12{,}5 = 30$)

3. **a)** Venus $-4{,}4$ ja Sirius $-1{,}5$
(Venuksen magnitudi on $-2{,}5 \log_{10} 58$.)
b) neljä tuhannesosaa Vegan kirkkaudesta
(Ratkaistaan yhtälö $-2{,}5 \log_{10} F = 6{,}0$, jolloin saadaan $F = 10^{\frac{6{,}0}{-2{,}5}}$. Yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.)

4. 8,9 %
(Jos määrärahojen suuruus vuonna 2007 oli a, niin vuonna 2012 määrärahat olivat $0{,}95^5\, a \approx 0{,}774a$. Kasvukerroin k ratkaistaan yhtälöstä $k^3 \cdot 0{,}774a = a$.)

5. $y = -4x + 4$ ja $y = -\frac{4}{11}x + \frac{4}{11}$
(Suora $y = -\frac{2}{3}x + 4$ leikkaa x-akselin pisteessä $(6, 0)$. Kolmion kannaksi valitaan pisteitä $(1, 0)$ ja $(6, 0)$ yhdistävä jana, jonka pituus on 5. Jotta kolmion pinta-ala olisi 10, kolmion korkeuden tulee olla 4. Suorien leikkauspisteen y-koordinaatin tulee siis olla 4 tai -4. Yhtälöistä $-\frac{2}{3}x + 4 = 4$ ja $-\frac{2}{3}x + 4 = -4$ saadaan leikkauspisteiden x-koordinaatit 0 ja 12. Toinen ratkaisu on pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 4)$ kautta kulkeva suora ja toinen ratkaisu pisteiden $(1, 0)$ ja $(12, -4)$ kautta kulkeva suora.)

6. tunnin ja 16 minuutin kuluttua
(Juoman ja ilman lämpötilan välinen lämpötilaero tulee joka tunti kerrotuksi samalla luvulla k. Aluksi lämpötilaero on 23 °C ja neljän tunnin kuluttua 6 °C. Siis $k^4 \cdot 23 = 6$, josta $k \approx 0{,}715$. Juoman lämpötila on 12 °C, kun $k^x \cdot 23 = 15$. Symbolisella laskimella tai logaritmin avulla saadaan $x \approx 1{,}27$ (h).)

Hakemisto

desibeli 102

eksponentiaalinen kasvu 76

eksponentiaalinen väheneminen 76

eksponentti 63

eksponenttifunktio 91

eksponenttiyhtälön $k^x = a$ ratkaiseminen ... 105

kantaluku 63

kulmakerroin
- määritelmä 7
- koordinaattiakselien suuntaisten suorien kulmakertoimet 9
- laskukaava 16

kymmenpotenssimuoto
- positiivinen eksponentti 69
- negatiivinen eksponentti 86

lineaarinen riippuvuus 4

logaritmi
- määritelmä 97
- merkitseminen 98

luvun n. juuri 112

melutaso 102

muutosprosentin laskeminen 52

potenssi
- eksponentti positiivinen kokonaisluku .. 63
- eksponentti nolla 84
- eksponentti negatiivinen kokonaisluku .. 84

potenssikaavat 66

potenssilausekkeen sieventäminen 66

potenssin logaritmikaava 103

potenssiyhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen 112

puoliintumisaika 118

richterasteikko 100

suoran piirtäminen 27

suoran yhtälö
- yhtälö $y = kx + b$ 23
- origon kautta kulkevan suoran yhtälö ... 24
- suoran yhtälön muodostaminen 32
- koordinaattiakselien suuntaisten suorien yhtälöt 34

suorien leikkauspisteen määrittäminen 41

suorien yhdensuuntaisuusehto 17

suurten lukujen lukusanat 69

taivaankappaleen magnitudi 139

tähtitieteellinen yksikkö 70

Valokuvien oikeudet

Kannen kuva: Suomen kuvapalvelu/Corbis/Justin Guariglia

Colourbox: s. 61
Jussi Murtosaari: s. 44
Plugi: s. 14, 58, 80
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Robert Harding World Imagery/Purcell-Holmes: s. 38
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Marianna Massey: s. 49
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Markus Altmann: s. 60
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Arctic-Images: s. 102
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Tim Graham: s. 110
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Tetra Images/Jamie Grill Photography: s. 121